不定积分求法

1. 第一换元法（凑微分法）

$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) = F[\varphi(x)]+C$.　$(F'(t)=f(t))$.

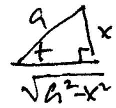
2. 第二换元法

设 $x=\varphi(t)$ 单调可导函数，且 $\varphi'(t)\neq 0$. 若 $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=\Phi(t)+C$.

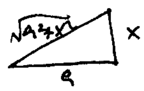
则 $\int f(x)dx=\Phi[\varphi^{-1}(x)]+C$

常用换元

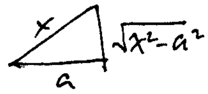
① 三角函数代换. 有 $\sqrt{a^2-x^2}$　令 $x=a\sin t$.



有 $\sqrt{a^2+x^2}$　令 $x=a\tan t$.



有 $\sqrt{x^2-a^2}$.　令 $x=a\sec t$



② 指数代换　令 $t=e^{kx}$

③ 无理函数代换　令 $t=\sqrt{ax+b}$，$t=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$，…

④ 倒代换.　令 $t=\frac{1}{x}$.

3. 分部积分法.

$$\int u\,dv = uv-\int v\,du$$

主要适用于不同类型函数的乘积的积分. 一般被积函数中有对数函数、反三角函数时经常用分部积分法（作为u处理）.

4. 有理函数的积分

通过恒等变换运算，有理函数的积分均可化为整式或以下四种类型的积分

(1) $\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a|+C$.

(2) $\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx = -\frac{A}{n-1}\frac{1}{(x-a)^{n-1}}+C \quad (n\neq 1)$

(3) $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \int \frac{dx}{\left[(x+\frac{p}{2})^2+\frac{4q-p^2}{4}\right]^n} \xlongequal[\frac{4q-p^2}{4}=a^2]{x+\frac{p}{2}=u} \int \frac{du}{(u^2+a^2)^n}$

(4) $\int \frac{x+a}{(x^2+px+q)^n}\,dx = -\frac{1}{2(n-1)(x^2+px+q)^{n-1}} + \left(a-\frac{p}{2}\right)\int \frac{dx}{(x+px+q)^n}$

从理论上讲，有理函数可通过上述方法积出来，但实际中应灵活机动，遇到有理函数积分的试题，应好先分析被积函数的特点，灵活选择解法.

5. 三角有理式的积分.

任何三角函数有理式都可用"万能代换"化为有理函数的积分．即令 $t=\tan\frac{x}{2}$，此时 $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，$dx=\frac{2}{1+t^2}dt$．但三角有理式的积分往往通过变形，使得被积函数①分母简单②幂次降低而达到直接可积的形式.

6. 无理函数的积分

往往可利用第二换元法来积.

定积分

1. 牛顿-莱布尼兹公式：若 f 连续 $F'=f$，则 $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$

2. 积分第一中值定理　若 f 连续，g 在 $[a,b]$ 可积且不变号，则 $\exists\xi\in[a,b]$

使得 $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$

3. 推论　$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$ 或 $f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

$\xi\in[a,b]$.

4. 变上、下限定积分的导数

$$\frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x).$$

如果被积函数中也含有变量 x，那么要设法把 x 拿到积分号外面，或通过变量代换把 x 换到积分的上、下限去。

5. 特殊形式的定积分的计算

分段函数的定积分应分段计算。

若 $f(x)$ 是奇函数，则 $\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 0$。

若 $f(x)$ 是偶函数，则 $\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 2\int_0^l f(x)\,dx$。

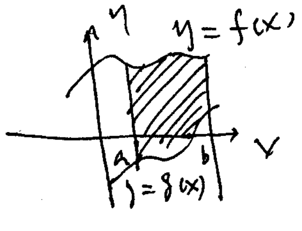
若 $f(x)$ 是周期为 T 的函数，则 $\int_0^T f(x)\,dx = \int_c^{T+c} f(x)\,dx$。

若被积函数的原函数不易求得，但利用变量代换可化为关于所求定积分的一个代数方程，于是可求得该定积分。

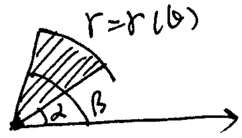
若被积函数本身就是一个变上、下限的定积分，则可通过分部积分的方法化简该定积分，也可利用二重积分变换次序的方法计算。

6. 几何上的应用

(1) 面积

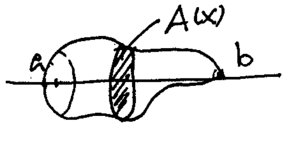


$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

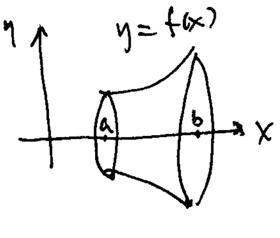


$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\,d\theta$$

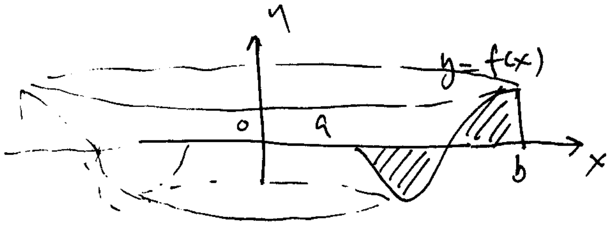
(2) 体积



$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$



$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$



$$V = \int_a^b 2\pi x\,|f(x)|\,dx.$$

(3) 弧长.

i 直角坐标系 $y=f(x)$ 介于 $a \le x \le b$.

$$l = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

ii. 参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $t_1 \le t \le t_2$.

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$$

iii 极坐标 $r=r(\theta)$ $\alpha \le \theta \le \beta$.

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta.$$

(4) 旋转体侧面积.

曲线 $y=f(x)$ $a \le x \le b$. 绕 x 轴旋转一周所成曲面面积.

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

向量代数

1. 向量的运算

(1) 数量积(内积、点积)

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$. $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

(2) 向量积(外积、叉积)

$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$. $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$, $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$成右手系.

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

$\vec{a}\parallel\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b}=0$ 或 $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$

(3) 混合积

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面 $\Leftrightarrow (\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0$

2. 平面方程

(1) 一般式方程: $Ax+By+Cz+D=0$. 其法向量为(A,B,C).

(2) 点法式方程: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

此平面过点(x_0,y_0,z_0). 法向量为(A,B,C).

(3) 三点式方程.
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$
$M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$在此平面上.

(4) 截距式方程. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$. a,b,c为此平面在x,y,z轴上的截距.

3. 直线方程

(1) 一般式方程
$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$
两平面的交. 方程组不唯一.

(2) 标准方程 $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$. 此直线过$(x_0,y_0,z_0)$.

(l,m,n)为方向向量. l,m,n最多可两个为0.

(3) 二点式方程 $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$, $M_1(x_1,y_1,z_1)$ $M_2(x_2,y_2,z_2)$为直线上两点.

(4) 参数式方程 $\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$ 此直线过 $M(x_0, y_0, z_0)$

(l, m, n) 为方向向量.

4. 平面、直线间的关系和距离

(1) $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ 与 $\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ 的夹角 θ

满足 $\cos\theta = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$

(2) $L: \dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$ 与 $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ 的夹角 θ 满足

$$\sin\theta = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

(3) $L_1: \dfrac{x-x_1}{l_1} = \dfrac{y-y_1}{m_1} = \dfrac{z-z_1}{n_1}$ 与 $L_2: \dfrac{x-x_2}{l_2} = \dfrac{y-y_2}{m_2} = \dfrac{z-z_2}{n_2}$ 的夹角 θ

满足 $\cos\theta = \dfrac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$.

(4) 点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $\pi: Ax + By + Cz = 0$ 的距离为

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

(5) 点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 到直线 $L: \dfrac{x-x_1}{l} = \dfrac{y-y_1}{m} = \dfrac{z-z_1}{n}$ 的距离为.

$$d = \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_0-x_1 & y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} \right\| \Big/ \sqrt{l^2+m^2+n^2}$$

多元函数微分学

1. 基本定理及公式.

(1) 概念间的关系.

$$\begin{array}{c} \text{偏导连续} \\ \Downarrow \\ \text{偏导存在} \Leftarrow \text{可微} \Rightarrow \text{连续} \Rightarrow \text{极限存在} \end{array}$$

上面箭头反过来都不一定能成立.

(2) 若 $f_{xy}(x,y)$ 和 $f_{yx}(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 连续，则 $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$

(3) 若 $z=f(x,y)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 可微，则 $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}\cdot\cos\alpha+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}\cdot\cos\beta$

其中 $\cos\alpha$，$\cos\beta$ 为 l 的方向余弦.

2. 多元函数微分法

(1) 设 $z=f(u,v)$，$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 都具有连续偏导，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}.\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

(2) 设 $z=z(x,y)$ 由 $F(x,y,z)=0$ 确定，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

(3) 设 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 由 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$ 确定，则

$$u'_x=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}\qquad u'_y=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}\qquad v'_x=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}\qquad v'_y=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}$$

3. 多元函数的泰勒公式

设 $z=f(x,y)$ 具有 $n+1$ 阶连续偏导，则

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)$$
$$+\cdots+\frac{1}{n!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0)+o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right).$$

4. 多元函数的极值

(1) 极值必要条件：若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 达到极值，且偏导存在，

则 $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$.

(2) 极值充分条件：若 $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$，记 $f_{xx}(x_0,y_0)=A$，

$f_{xy}(x_0,y_0)=B$，$f_{yy}(x_0,y_0)=C$（f 具二阶连续偏导），则

当 $AC-B^2>0$ 且 $A>0\ (<0)$ 时 $f(x_0,y_0)$ 为极小(大)值，$AC-B^2<0$

时 $f(x_0,y_0)$ 非极值. $AC-B^2=0$ 时待定.

(3) 条件极值的求法

1°. 化为无条件极值. 求 $z=f(x,y)$ 在 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值. 可先由 $\varphi(x,y)=0$ 解出 $y=g(x)$. 得 $z=f(x,g(x))$ 为无条件极值.

2°. 拉格朗日乘子法. 求 $z=f(x,y)$ 在 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值. 可先作拉格朗日函数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$, 其驻点就是可能极值点.

5. 曲线的切线与法平面

(1) 参数方程 $L:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ 在 $t=t_0$ 处的

切线方程为 $\dfrac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\dfrac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}$

法平面方程为 $x'(t_0)(x-x(t_0))+y'(t_0)(y-y(t_0))+z'(t_0)(z-z(t_0))=0$.

(2) 一般方程 $L:\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的

切线方程为 $\dfrac{x-x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_{M_0}}=\dfrac{y-y_0}{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_{M_0}}=\dfrac{z-z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_{M_0}}$

法平面方程为 $\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_{M_0}(x-x_0)+\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_{M_0}(y-y_0)+\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}(z-z_0)=0$.

重积分

1. 基本定理及公式

(1) 中值定理: f在D上连续, $\exists(\xi,\eta)\in D$. $\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = f(\xi,\eta)A$

其中A为D的面积.

(2) 对称性定理.

1° 若D关于x轴(y轴; 原点)对称, $f(x,-y)=-f(x,y)$

($f(-x,y)=-f(x,y)$; $f(-x,-y)=-f(x,y)$). 则 $\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma=0$.

2°. 若D关于x轴(y轴; 原点)对称. $f(x,-y)=f(x,y)$.

($f(-x,y)=f(x,y)$; $f(-x,-y)=f(x,y)$) 则 $\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma=2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,d\sigma$

D_1为D中两对称部分的一部分.

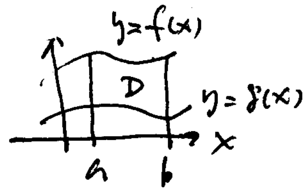
3°. 若D关于直线$y=x$对称. 则 $\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma=\iint\limits_D f(y,x)\,d\sigma$.

注: 三重积分有完全类似的性质.

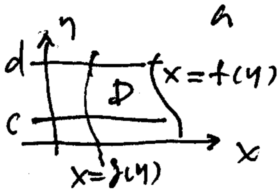
2. 二重积分的计算.

直角坐标系:

1°. $\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma=\int_a^b dx\int_{g(x)}^{f(x)} f(x,y)\,dy$.

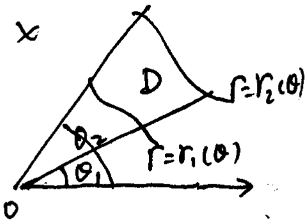


2°. $\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma=\int_c^d dy\int_{g(y)}^{f(y)} f(x,y)\,dx$

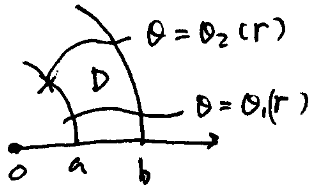


极坐标系:

3°. $\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma=\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr$



4°. $\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma=\int_a^b r\,dr\int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,d\theta$



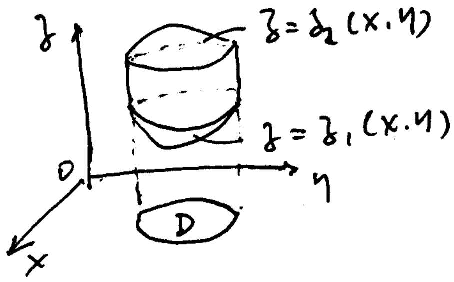
5°. 设f连续, $\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}$ 把D'映成D.

$x(u,v)$, $y(u,v)$有连续的偏导且 $J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$. 则

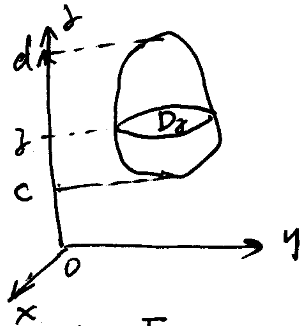
$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\,|J|\,du\,dv.$$

3. 三重积分的计算:

1° 先一后二: $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV=\iint\limits_D dx\,dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$.



先一后二



先二后一

2° 先二后一 $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV=\int_c^d dz\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\,dx\,dy$.

当$f(x,y,z)$仅为z的函数时,往往采用此法较简便.

3° 柱面坐标

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV=\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}r\,dr\int_{z_1(\theta,r)}^{z_2(\theta,r)} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\,dz.$$

4° 球面坐标

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV=\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}\sin\varphi\,d\varphi\int_{z_1(\theta,\varphi)}^{z_2(\theta,\varphi)} f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)\,r^2\,dr$$

5° 一般变量替换

设f连续, $\begin{cases}x=x(u,v,w)\\ y=y(u,v,w)\\ z=z(u,v,w)\end{cases}$ 将V'映成V. $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$, $z(u,v,w)$ 有连续偏导. $J=\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\neq 0$. 则

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{V'} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\,|J|\,du\,dv\,dw.$$

4. 曲面的面积

设曲面的方程为$z=f(x,y)$. 曲面在xOy平面上投影为D. f有连续偏导. 则曲面面积为

$$A=\iint\limits_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy.$$

曲线积分

1、基本性质和定理

(1) 第一型曲线积分与路径方向无关，第二型曲线积分与路径方向有关。

(2) <u>格林定理</u> 设 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 在闭域 D 上一阶偏导连续，L 是 D 的正向边界，则 $\oint_L P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$.

(3) 设 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在单连通域 D 上一阶偏导连续，则

$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ 与路径无关

$\Leftrightarrow \oint_{L'} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0.\quad (\forall L' \subset D)$.

$\Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

$\Leftrightarrow P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ 为 $u(x,y)$ 的全微分.

(4) <u>斯托克斯公式</u>

设 Σ 为有向曲面，L 为 Σ 边界，L 的正向与 Σ 的侧向符合右手规则，P、Q、R 具有一阶连续偏导，则

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} dy\,dz & dz\,dx & dx\,dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

(5) 设 P、Q、R 有连续偏导，则

$\int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ 与路径无关.

$\Leftrightarrow \oint_{L'} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0 \quad (\forall L')$

$\Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$，$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$，$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$

$\Leftrightarrow \exists u$，$du = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$

2. 曲线积分的计算

(1) 第一型曲线积分

1° $L:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta.$

$$\int_L f(x,y)\,ds = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt.$$

2°. $L.\ y = y(x).\quad a \le x \le b.$

$$\int_L f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx.$$

3°. $L:\ r = r(\theta)\quad (\alpha \le \theta \le \beta)$

$$\int_L f(x,y)\,ds = \int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta,\ r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta.$$

4°. $L:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta.$

$$\int_L f(x,y,z)\,ds = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt.$$

(2) 第二型曲线积分

1°. $L:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t). \end{cases} \quad t:\ \alpha \to \beta.$

$$\int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_\alpha^\beta \big[P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\big]\,dt$$

2°. 利用格林公式.

当L不封闭时. 可引入辅助曲线 L_1. 使 $L+L_1$ 封闭, 然后利用格林公式. 然后减去 L_1 上的积分. 这里要注意 P. Q 要在D上有一阶连续偏导. 若D中某些点不合要求. 须将这些点挖去. 然后利用格林公式.

3°. 利用路径无关条件

当 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ 时，可找一条较简单的路径计算积分. 一般可取平行于 x 轴或 y 轴的折线.

4°. 利用原函数.

当被积函数为某二元函数的全微分，则曲线积分就是这二元函数在曲线两端点函数值的差.

5°. 空间曲线积分可利用斯托克斯公式或积分与路径无关条件.

曲面积分

~~1. 第一型曲面积分与侧向无关. 第二型曲面积分与曲面的侧~~

1. 基本性质和定理

(1) 第一型曲面积分与曲面的侧向无关. 第二型曲面积分与曲面的侧向有关.

(2) 两种曲面积分的关系为

$$\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS=\iint_{\Sigma}P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy.$$

其中 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 为曲面上单位法向量.

(3). 高斯公式 设 $P.Q.R$ 一阶偏导连续. Σ 为 Ω 边界曲面的外侧. 则 $\iint_{\Sigma}P\,dydx+Q\,dzdx+R\,dxdy=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz.$

2. 曲面积分的计算

(1) 第一型曲面积分

设Σ的方程为 $z=z(x,y)$，D_{xy} 为Σ在 xoy 平面上的投影，$z=z(x,y)$ 在 D_{xy} 上有一阶连续偏导，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS=\iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy.$$

类似可将第一型曲面积分化为在 xoz 平面上或 yoz 平面上的二重积分

(2) 第二型曲面积分

1°. 设Σ的方程为 $z=z(x,y)$，D_{xy} 为Σ在 xoy 平面上的投影，R 在Σ上连续，则 $\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,dxdy=\pm\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,dxdy$. 当Σ取上侧时取"+"，Σ取下侧时取"−"。

类似可把 $\iint_{\Sigma} P\,dydz$、$\iint_{\Sigma} Q\,dzdx$ 化为 yoz、xoz 平面上的二重积分

2°. 利用高斯公式.

当Σ不封闭时，可添加 Σ_1 使之封闭，再利用高斯公式，同时也要注意 P、Q、R 在封闭区域内是否具有一阶连续偏导.

3°. 利用矢量点积法.

设曲面Σ的方程为 $z=f(x,y)$，则

$$\iint_{\Sigma} P\,dxdy+Q\,dzdx+R\,dxdy=\pm\iint_{D_{xy}}(P,Q,R)(-f_x,-f_y,1)\,dxdy.$$

其中 D_{xy} 为Σ在 xoy 平面上的投影，Σ的侧与 $(-f_x,-f_y,1)$ 相同取"+"，反之取"−"。

类似可将第二型曲面积分化为在 xoz 平面或 yoz 平面上的二重积分.

级数

1. 数项级数收敛性的判断

(1) 正项级数

1°. 比较判别法.

i. 若 $a_n \le b_n$. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

ii. 若 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$ (常数) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

常取 b_n 为 n^p 或 c^n. 即 $\sum b_n$ 为 p 级数或几何级数.

2°. 比值判别法.

若 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. 若 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p < 1$. 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

3°. 根值判别法

若 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$. 则 $\rho > 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. $\rho < 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

4°. 积分判别法.

设 $f(x)$ 单调降. 则 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛 $\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

(2) 一般项级数.

1°. 交错级数的莱布尼兹判别法.

若 i. $a_n \ge a_{n+1}$. ii $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛 $(a_n > 0)$

2°. 绝对收敛必收敛.

3°. 若 $\lim_{n\to\infty} a_n \ne 0$. 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

2. 幂级数

(1). 若 $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$ 或 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$. 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的

收敛半径为 $R = \frac{1}{l}$.

(2). 幂级数的和函数 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-R,R)$ 内连续，且

可逐项求导．即 $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$

可逐项积分．即 $\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nt^ndt$.

(3) 常用麦克劳林级数．

$$e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}\qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!}\qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{n+1}}{n+1}\qquad x\in(-1,1].$$

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n.\qquad x\in(-1,1).$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n.\qquad x\in(-1,1).$$

(4). 泰勒级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

3. 付里叶级数

(1) 周期为 2π 的付里叶级数

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

其中 $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$. $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$.

(2) 周期为 $2l$ 的付里叶级数

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

其中 $a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$. $b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$.

(3). 在 $f(x)$ 的第一类间断点 x_0，付里叶级数收敛于 $\frac{1}{2}[f(x_0-0)+f(x_0+0)]$

常微分方程

1. 一阶微分方程

(1) 可分离变量的微分方程: $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$. 其通解为

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

(2) 一阶线性方程: $y' + P(x)y = Q(x)$. 其通解为

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right).$$

(3). 齐次方程: $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

通过变换 $z = \frac{y}{x}$ 化为可分离变量的方程 $\frac{dz}{\varphi(z) - z} = \frac{dx}{x}$.

(4) 贝努里方程: $y' + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0, 1)$.

通过变换 $z = y^{1-k}$ 化为一阶线性方程 $\frac{dz}{dx} + (1-k)P(x)z = (1-k)Q(x)$.

(5) 全微分方程 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$. 其中 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. 其解为

$u(x,y) = C$. ($du = Pdx + Qdy$). $u(x,y)$ 的求法为

1°. $u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(\xi, y)d\xi + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, \eta)d\eta$.

或 $u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(\xi, y_0)d\xi + \int_{y_0}^{y} Q(x, \eta)d\eta$.

2°. 把 $u(x,y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y)$ 对 y 求偏导与 $Q(x,y)$ 比较可得 $\varphi'(y)$. 再积分可得 $\varphi(y)$. 于是得 $u(x,y)$.

(也可先 $u(x,y) = \int Q(x,y)dy + \psi(x)$ 对 x 求偏导, 再计算)

3°. 可把方程中本身已构成全微分的项分出, 再将剩余的项凑成全微分, 再将已求得的各原函数组合起来, 得到整个原函数.

(6) 若方程中出现 $f(xy)$, $f(x \pm y)$, $f(x^2 \pm y^2)$, $f\left(\frac{x}{y}\right)$ … 等形式的项, 往往可作相应变量替换: $u = xy$, $x \pm y$, $x^2 \pm y^2$, $\frac{x}{y}$.

2. 可降阶的微分方程

(1) $y^{(n)}=f(x)$.

解法：积分 n 即可. 注意每积分一次要加一个常数.

(2) $y''=f(x,y')$（不含 y）

解法：令 $y'=p$. 则 $y''=p'$ 原方程化为一阶方程 $p'=f(x,p)$.

(3). $y''=f(y,y')$（不含 x）

解法：令 $y'=p$. 则 $y''=p\dfrac{dp}{dy}$. 原方程化为 $p\dfrac{dp}{dy}=f(y,p)$.

3. 二阶线性微分方程

(1) 齐次：$y''+a_1y'+a_2y=0$. 其特征方程为 $\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$.

若 λ_1、λ_2 为两相异实根. 则通解为 $y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$

若 $\lambda_1=\lambda_2$ 为两相等实根. 则通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{\lambda_1x}$

若 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ 为两共轭复根. 则通解为 $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$.

(2) 非齐次：$y''+a_1y'+a_2y=f(x)$

若 $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$. 其中 P_l. P_n 为 l 次, n 次多项式. 则方程有特解 $y^*(x)=e^{\lambda x}x^k[A_m\cos\omega x+B_m\sin\omega x]$ 其中 A_m. B_m $(m=\max(l,n))$ 是 m 次多项式. 而 k 则依据 $\lambda+i\omega$ 不是或是对应特征方程的根取 0 或 1. 将此特解代入原方程就可确定 A_m. B_m 的各项系数从而得到特解 $y^*(x)$. 特解加上对应齐次的通解 $\bar{y}(x)$ 就是非齐次的通解. 即通解为 $y=\bar{y}(x)+y^*(x)$.

4. 线性微分方程解的叠加原理和通解结构

(1) 设 $y_1,\cdots,y_n$ 是方程 $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=0$ 的 n 个线性无关的解. 则此方程通解为 $y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n$

(2) 设 y_0 是方程 $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=f(x)$ 的一个特解. $\bar{y}$ 是该方程对应的齐次方程的通解. 则此方程通解为 $y=y_0+\bar{y}$.

(3) 设 $y_1, y_2, \cdots, y_k$ 分别是方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=f_1(x)$$
$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=f_2(x)$$
$$\cdots$$
$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=f_k(x)$$

的解. 则 $y_1+y_2+\cdots+y_k$ 是方程

$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_k(x)$ 的解.

5. 欧拉方程

欧拉方程 $x^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}x\frac{dy}{dx}+a_ny=f(x)$

可通过变量替换. $x=e^t$ 或 $t=\ln x$ 把它变成以 t 为自变量. y 为未知函数的常系数线性微分方程. 从而得以求解.

练习题

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{e^x-\cos x}$ (0)

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$ $(\frac{3}{2})$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$ $(-\frac{1}{4})$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}$ $(-\frac{1}{6})$

5. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}$ (-1)

6. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}$ (e^6)

7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}$ $(a>0,\ b>0)$ $(ab^{\frac{3}{2}})$

8. $\lim\limits_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}$ (e^2)

9. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$ $(e^{-\frac{1}{2}})$

10. $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x$ $(\frac{1}{2})$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$ $(\frac{1}{6})$

12. $\lim\limits_{x\to \infty}x\left[\sin\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$ (2)

13. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)$ $(\frac{1}{3})$

14. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}$ (1)

15. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ $(e^{\frac{1}{6}})$

16. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{2}} & x>0\\ ae^{2x} & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值　(-2)

17. 设 $f(x)$ 可导．$f(0)=0$，$f'(0)=b$．若 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+a\sin x}{x} & x\neq 0\\ A & x=0\end{cases}$

在 $x=0$ 连续，求 A 的值．　$(a+b)$．

18. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{ax}=\int_{-\infty}^{a} te^{t}\,dt$．求 a 的值　(2)

19. 已知 $x\to 0$ 时．$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{等价无穷小}}}{\sim}\cos x-1$．求 a 的值　$(-\frac{3}{2})$．

20. 设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin(t^2)\,dt$．求 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 x 的 n 阶无穷小．　(3)．

21. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$．则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}=$　(36)

22. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\dfrac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}=1$．求正的常数 a 和 b．　$(4,1)$

23. 确定常数 a,b,c．使得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^2)}{t}dt}=c$　$(c\neq 0)$

$(1,\ 0,\ \frac{1}{2})$．

24. 设 $f(t)=\lim\limits_{x\to+\infty}t(1+\frac{1}{x})^{2tx}$．求 $f'(t)$．　$(1+2t)e^{2t}$

25. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\frac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\frac{n\pi}{n}}\right)$．　$(\frac{2\sqrt{2}}{\pi})$

26. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$．找出 $f(x)$ 所有间断点　$(x=1)$．

27. 已知曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\int_0^{\arctan x}e^{-t^2}dt$ 在 $(0,0)$ 处切线相同．求 $\lim\limits_{n\to\infty}nf(\frac{2}{n})$　(2)

28. 设 $x_1=10$, $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$ $(n=1,2,\cdots)$. 试证 $\{x_n\}$ 极限存在并求此极限 (利用单调有界必有极限, 3).

29. 已知 $f'(x_0)=-1$. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}$ (1)

30. 设 $y=(x+e^{-\frac{x}{2}})^{\frac{2}{3}}$. 求 $y'|_{x=0}$ ($\frac{1}{3}$).

31. 设 $y=y(x)$ 由 $\ln(x^2+y)=x^3y+\sin x$ 确定. 求 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$ (1)

32. 设 $g(x)$ 可导. $h(x)=e^{1+g(x)}$, $h'(1)=1$. $g'(1)=2$. 求 $g(1)$ 的值 ($-\ln 2-1$).

33. 设 $y=f\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)$. $f'(x)=\arctan x^2$. 求 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$ ($\frac{3}{4}\pi$).

34. 设 $y=y(x)$ 由 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定. 求 $y''(0)$. (-2).

35. 设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=t-\ln(1+t) \\ y=t^3+t^2 \end{cases}$, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$. $\left(\frac{6t^2+11t+5}{t}\right)$.

36. 设 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$. 求 $f^{(n)}(x)$. $\left((-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}\right)$

37. 设 $y=(1+\sin x)^x$. 求 $dy\,|_{x=\pi}$ ($-\pi\,dx$).

38. 设 $y=y(x)$ 由 $x=y^y$ 确定. 求 dy $\left(\frac{1}{x(\ln y+1)}dx\right)$.

39. 求曲线 $y=\int_0^x(t-1)(t-2)\,dt$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程 ($y=2x$)

40. 设曲线 $f(x)=x^n$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(\xi_n,0)$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=$ (e^{-1})

41. 设 $y=f(x)$ 由 $xy+2\ln x=y^4$ 确定. 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程. ($y=x$).

43. 设 $f(x)=3x^2+x^2|x|$. 则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n 为 (2)

44. $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$ 不可导点的个数有 n 个 (2)

45. 设 $f(x)=x^2\ln(1+x)$. 求 $f^{(n)}(0)$ $(n\geq 3)$. $\left((-1)^{n-3}n(n-1)(n-3)!\right)$

46. 设 $y=\arcsin e^{-\sqrt{x}}$. 求 y' $\left(-\dfrac{e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-e^{-2\sqrt{x}}}}\right)$

47. 设 $\begin{cases} x=5(t-\sin t) \\ y=5(1-\cos t) \end{cases}$ 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ $\left(-\dfrac{1}{5(1-\cos t)^2}\right)$

48. 设 $\begin{cases} x=\int_0^t f(u^2)\,du \\ y=[f(t^2)]^2 \end{cases}$ 其中 f 二阶可导 且恒不为零. 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

$\left(\dfrac{4f'(t^2)+8t^2f''(t^2)}{f(t^2)}\right)$

49. 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x^2}(1-\cos x) & x<0 \\ 1 & x=0 \\ \dfrac{1}{x}\int_0^x \cos t^2\,dt & x>0 \end{cases}$ 讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性和可导性 (连续. 可导).

50. 设 f 连续. $\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\,dt$. 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$. 求 $\varphi'(0)$ $\left(\dfrac{A}{2}\right)$

51. 已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数. 它在 $x=0$ 的某个邻域内满足关系式 $f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x)$. 其中 $\alpha(x)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x 高阶的无穷小. 且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导. 求曲线在点 $(6, f(6))$ 处的切线方程 $(y=2(x-6))$.

练习题

1. $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$ $\quad(-2\arctan\sqrt{1-x}+c)$.

2. $\int \frac{\ln x-1}{x^2}dx$ $\quad(-\frac{\ln x}{x}+c)$.

3. $\int \frac{x+5}{x^2-6x+13}dx$ $\quad(\frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13)+4\arctan\frac{x-3}{2}+c)$.

4. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ $\quad(2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+c)$.

5. $\int e^{\sqrt{2x-1}}dx$ $\quad((\sqrt{2x-1}-1)e^{\sqrt{2x-1}}+c)$

6. $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$ $\quad(-\frac{1}{\ln x}+c)$.

7. $\int \frac{x^2}{1+x^2}\arctan x\,dx$ $\quad(-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}+c)$.

8. $\int x\sin^2 x\,dx$ $\quad(\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}x\sin 2x-\frac{1}{8}\cos 2x+c)$.

9. $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx$ $\quad(-\frac{\arcsin e^x}{e^x}-\ln(1+\sqrt{1-e^{2x}})+x+c)$.

10. $\int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx$ $\quad$(令$x=\tan t$. $\frac{1}{2}e^{\arctan x}(\frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}})+c$).

11. $\int e^{2x}(\tan x+1)^2dx$ $\quad(e^{2x}\tan x+c)$

12. 已知$f(x)$的一个原函数为$\ln^2 x$，求$\int x f'(x)dx$

$(2\ln x-\ln^2 x+c)$

13. 已知$f'(e^x)=xe^{-x}$，且$f(1)=0$，求$f(x)$ $\quad(f(x)=\frac{1}{2}\ln^2 x)$.

14. 已知曲线$y=f(x)$过点$(0,-\frac{1}{2})$，且其上任一点(x,y)处切线的斜率为$x\ln(1+x^2)$，求$f(x)$.

$(f(x)=\frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2)-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2})$.

15. 求 $\frac{d}{dx}\left(\int_0^{\cos 3x} f(t)\,dt\right)$ $\qquad$ $(-3f(\cos 3x)\sin 3x)$.

16. 设 $f(x)$ 连续. $\int_0^{x^3-1} f(t)\,dt = x$. 求 $f(7)$. $\qquad$ $(\frac{1}{12})$.

17. 设 $f(x)$ 有连续导数. $f(0)=0$. $f'(0)\neq 0$. $F(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f(t)\,dt$.
且当 $x\to 0$ 时. $F'(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小. 求 k 的值 $\qquad$ (3).

18. $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\,dx$ $\qquad$ $(\frac{\pi}{4})$

19. $\int_{-2}^2 \frac{x+|x|}{2+x^2}\,dx$ $\qquad$ $(\ln 3)$

20 $\int_{-1}^1 (|x|+x)e^{-|x|}\,dx$ $\qquad$ $(2-4e^{-1})$

22. $\int_1^4 \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})}$ $\qquad$ $(2\ln\frac{4}{3})$

23. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}\,dx$ $\qquad$ $(\frac{1}{3}\ln 2)$

~~24. 设 $f(x)=\sin x-\int_0^x (x-t)f(t)\,dt$. 其中 f 连续. 求 $f(x)$~~

24 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\tan^3 x}$ $\qquad$ $(\frac{\pi}{4})$.

25. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sin x}}{e^{\sin x}+e^{\cos x}}\,dx$. $\qquad$ $(\frac{\pi}{4})$.

26. $\int_0^{\pi} \frac{x\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx$ $\qquad$ (令 $x=\pi-t$, $\frac{1}{2}(\pi^2-2\pi)$).