目　　录

数学竞赛之我见

王　元　(中国科学院数学研究所)

随着数学竞赛的发展，已逐渐形成一门特殊的数学学科——竞赛数学。

一、数学竞赛的简史

数学竞赛与体育竞赛相类似，它是青少年的一种智力竞赛，所以苏联人首创了“数学奥林匹克”这个名词。在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛中，数学竞赛历史最悠久，参赛国最多，影响也最大。比较正规的数学竞赛是1894年在匈牙利开始的，除因两次世界大战及1956年事件而停止了7届外，迄今已举行过90届。苏联的数学竞赛开始于1934年，美国的数学竞赛则是1938年开始的。这两个国家除第二次世界大战期间各停止了3年外，均已举行过50多届。其他有长久数学竞赛历史的国家是罗马尼亚(始于1902年)、保加利亚(始于1949年)和中国(始于1956年)。

1956年，东欧国家和苏联正式确定了国际数学奥林匹克的计划，并于1959年在罗马尼亚布拉索夫举行了第一届国际数学奥林匹克(International Mathematics Olympiad，简称IMO)。以后每年举行一次。除1980年因东道国蒙古经济困难停办外，至今共举行过31届。参赛国家也愈来愈多。第一届仅7个国家参加，至1980年已有23个；到1990年，则

有54个。

必须说明在上述历史之前已有一些数学竞赛活动。例如苏联人说，在1886年帝俄时代就举行过数学竞赛。又如1926年在中国上海市举办过包括学生、银行和钱庄职员在内的珠算比赛，中华职业学校一年级学生，16岁的华罗庚凭智慧夺得了冠军。这些都是关于数学竞赛的佳话，不列入正史。

二、数学竞赛的发展

数学竞赛活动是由个别城市，向整个国家，再向全世界逐步发展起来的。例如苏联的数学竞赛就是先从列宁格勒和莫斯科开始，至1962年拓展至全国的。美国则是到1957年才有全国性的数学竞赛的。

数学竞赛活动也是由浅入深逐步发展的。几乎每个国家的数学竞赛活动都是先由一些著名数学家出面提倡组织，试题与中学课本中的习题很接近；然后逐渐深入，并有一些数学家花比较多的精力从事选题及竞赛组织工作，这时的试题逐渐脱离中学课本范围，当然仍要求用初等数学语言陈述试题并可以用初等数学方法求解。例如苏联数学竞赛之初，著名数学家柯尔莫哥洛夫、亚历山大洛夫、狄隆涅等都参与过这一工作。在美国，则有著名数学家伯克霍夫父子、波利亚、卡普兰斯基等参与过这项工作。

国际数学奥林匹克开始举办后，参赛各国的备赛工作往往主要是对选手进行一次强化培训，以拓广他们的知识，提高他们的解题能力。这种培训课程是很难的，比中学数学深了很多。这时就需要少数数学家专门从事这项活动。

数学竞赛搞得好的国家，竞赛活动往往采取层层竞赛、

层层选拔这种金字塔式的方式进行。例如，苏联分五级竞赛，即校级、市级、省级、加盟共和国级和全苏竞赛，每一级的竞赛人数约为前一级的1/10；还设立了8个专门的数学学校(或数学奥林匹克学校)，以培养数学素质好的学生。

数学竞赛虽然历史悠久，但最近10年有很大发展和变化，有关工作愈趋专门。我们要认真注意其发展，认识其规律。

三、数学竞赛的作用

1. 选拔出有数学才能的青少年。由于数学竞赛是在层层竞赛，水平逐步加深的考核基础上选拔出优胜者，优胜者既要有踏实广泛的数学基础，又要有灵活机智的头脑和富于创造性的才能，所以他们往往是既刻苦努力又很聪明的青少年。这些人将来成才的概率是很大的。数学竞赛活动受到愈来愈多国家的注意，在世界上发展得那么快的重要原因之一就在于此。在匈牙利，著名数学家费叶、黎茨、舍贵、寇尼希、哈尔、拉多等都曾是数学竞赛的优胜者。在波兰，著名数论专家辛哲尔是一位数学竞赛优胜者。在美国，数学竞赛优胜者中后来成为菲尔兹数学奖获得者的有米尔诺、曼福德、奎伦三人。也有不少优胜者成为著名的物理学家或工程师，如著名力学家冯·卡门。

2. 激发了青少年学习数学的兴趣。数学在一切自然科学、社会科学和现代化管理等方面都愈来愈显得重要和必不可少。由于电子计算机的发展，各门科学更趋于深入和成熟，由定性研究进入定量研究。因此青少年学好数学对于他们将来学好一切科学，几乎都是必要的。数学竞赛将健康的

竞争机制引进青少年的数学学习中，将激发他们的上进心，激发他们的创造性思维。由于数学竞赛是分级地金字塔式地进行的，所以国家级竞赛之前的竞赛，试题基本上不脱离中学数学课本范围，适合广大青少年参加。但也要承认人的天赋和数学素质是有差别的，甚至会有很大的差别。国家级竞赛及其以后的竞赛和培训，只能在少数人中拔高进行，少数有很好数学素质的青少年是吃得消的。例如，澳大利亚少年托里·陶在他10岁、11岁和12岁时分别在第27、28和29届国际数学奥林匹克上获得铜牌、银牌和金牌。在数学竞赛的拔高阶段当然需要一些大学老师和数学专业研究人员参与。

3． 推动了数学的教学改革工作。数学竞赛进入高层次后，试题内容往往是高等数学的初等化。这不仅给中学数学添入了新鲜内容，而且有可能在逐步积累的过程中，促使中学数学教学在一个新的基础上进行反思，由量变转入质变。中学教师也可在参与数学竞赛活动的过程中，学得新知识，提高水平，开阔眼界。事实上，已有一些数学教学工作者在这项活动中逐渐尝到了甜头。因此数学竞赛也可能是中学数学课程改革的“催化剂”之一，似乎比自上而下的“灌输式”的办法为好。60年代初，西方所谓中学数学教学现代化运动即是企图用某些现代数学代替陈旧的中学数学内容，但采取了由上往下灌输的方法，结果既脱离教师水平，也脱离学生循序学习所需要的直观思维过程。现在基本上被风一吹，宣告失败了。相反地，数学竞赛也许是一条途径。在中国，中学生的高考压力很重，中学教师为此而奔波，确有路子愈走愈窄之感。数学竞赛或许能使中学数学的教学改革走向康庄大道。

四、竞赛数学——奥林匹克数学

随着数学竞赛的发展，已逐渐形成一门特殊的数学学科——竞赛数学，也可称为奥林匹克数学。将高等数学下放到初等数学中去，用初等数学的语言来表述高等数学的问题，并用初等数学方法来解决这些问题，这就是竞赛数学的任务。这里的问题甚至解法的背景往往来源于某些高等数学。数学就其方法而言，大体上可以分成分析与代数，即连续数学与离散数学。由于目前微积分不属于国际数学奥林匹克的范围，所以下放离散数学就是竞赛数学的主体。很多国际数学奥林匹克的试题来自数论、组合分析、近世代数、组合几何、函数方程等。当然也包含中学课程中的平面几何。

竞赛数学又不同于上述这些数学领域。通常数学往往追求证明一些概括广泛的定理，而竞赛数学恰恰寻求一些特殊的问题。通常数学追求建立一般的理论和方法，而竞赛数学则追求用特殊方法来解决特殊问题；而且一旦某个问题面世，即成为陈题，又需继续创造新的问题。竞赛数学属于“硬”数学范畴，它通常也与纯粹数学一样，以其内在美，包括问题的简练和解法的巧妙，作为衡量其价值的重要标准。

竞赛数学不能脱离现有数学分支而独立发展，否则就成了无源之水，所以它往往由某些领域的专家兼搞，如参加国际数学奥林匹克的中国代表团的出色教练单墫，就是一位数论专家。

国际数学奥林匹克的精神是鼓励用巧妙的初等数学方法来解题，但并不排斥高等数学方法和定理的使用。例如在这

次第31届国际数学奥林匹克中，有学生在解题时用到了贝特朗假设，也称车比雪夫定理，即当 n 大于1时，在 n 和 $2n$ 之间必定有一个素数。还有人在解题时用到了谢尔宾斯基定理，即一个平方数表成 s 个平方数之和的通解形式。这些定理须在华罗庚所著的《数论导引》（大学数学系研究生教本）或更专门的书中才能找到。这样不仅已是"杀鸡用牛刀"，而且按某外国教练的说法，"他们在用原子弹炸蚊子，但蚊子被炸死了！"这样做是允许的，但不是国际数学奥林匹克所鼓励的。

国际数学奥林匹克的一个难试题，经简化后的证明要写三四页，这不仅大大超过中学课本的深度，也不低于大学数学系一般课程的深度，当然不包括大学课程的广度。实际上，大学数学系课程中，一条定理的证明长达3页者并不多。一个好试题的解答，大体上相当于一篇有趣的短论文。因此用这些问题来考核青少年的数学素质是相当科学的。它们的解决需要参赛者有相当宽广的数学基础知识，再加上机智和创造性。这与单纯的智力小测验完全不同。国际上的数学竞赛范围，大体上从小学四年级到大学二年级。小学生因基础知识太少，这期间的所谓数学竞赛，其实是智力小测验型。对大学生应强调系统学习，要求对数学有一个整体了解。因此数学竞赛的重点应是中学，特别是高中。

现在已经积累了丰富的数学竞赛题库，可供中学师生和数学爱好者练习。国际上也已经有了竞赛数学的专门杂志。

五、数学竞赛在中国

我国的数学竞赛始于1956年，当时举办了北京、上海、

武汉、天津四城市的高中数学竞赛。华罗庚、苏步青、江泽涵等最有威望的数学家都积极出面领导并参与这项工作。但由于"左"的冲击，至1965年，只零零星星地举行过6届。"文化大革命"开始后，数学竞赛更被看成是"封、资、修"的一套而被迫全部取消。直到"四人帮"被打倒，我国的数学竞赛活动于1978年又重新开始，并从此走上了迅速发展的康庄大道。1980年前的数学竞赛属于初级阶段，即试题不脱离中学课本。1980年以后，逐渐进入高级阶段。我国于1985年第一次参加国际数学奥林匹克，1986 年 开 始 名列前茅，1989和1990年连续两年获得团体总分第一。

今年我国成功地举办了第31届国际数学奥林匹克，这标志着我国的数学竞赛水平已达到国际领先水平。第一，中国再次获得团体总分第一，说明我国金字塔式的各级竞赛和选拔体系及奥林匹克数学学校和集中培训系统是完善的。第二，我国数学家对35个国家提供的100多个试题，进行了简化与改进，从中推荐出28个问题供各国领队挑选，结果被选中5题（共需6题），这说明我国竞赛数学的水平是相当高的。第三，各国学生的试卷先由各国领队批改，然后由东道主国家组织协调认可。我们组织了近50位数学家任协调员，评分准确、公平，提前半天完成了协调任务，说明我国的数学有相当的实力。第四，这是首次在亚洲举行国际数学奥林匹克，中国的出色成绩鼓舞了发展中国家，特别是亚洲国家。除此而外，这次竞赛的组织工作也是相当不错的。

在中国，从老一辈数学家，中青年数学家，直至中小学老师，成千上万人的共同努力，才在数学竞赛方面获得了今天的成就。这里特别要提到华罗庚，他除倡导中国的数学竞

赛外，还撰写了《从杨辉三角谈起》、《从祖冲之的圆周率谈起》、《从孙子的“神奇妙算”谈起》、《数学归纳法》和《谈谈与蜂房结构有关的数学问题》5本小册子，这些是他的竞赛数学作品。我国在1978年重新恢复数学竞赛后，他还亲自主持出试题，并为试题解答撰写评论。中国其他优秀竞赛数学作品有段学复的《对称》、闵嗣鹤的《格点和面积》、姜伯驹的《一笔画和邮递路线问题》等。这里还应提到王寿仁，他从跟华罗庚一起工作起，一直到今天，始终领导并参与了数学竞赛活动。他带领中国代表队3次出国参加国际数学奥林匹克，并领导了第31届国际数学奥林匹克的工作。1980年以后，我国基本上由中青年数学家接替了老一辈数学家从事的数学竞赛工作，他们积极努力，将中国的数学竞赛水平推向一个新的高度。裘宗沪就是一位突出代表。他从培训学生到组织领导数学竞赛活动，从3次带领中国代表队参加国际数学奥林匹克到举办第31届国际数学奥林匹克，均作出了杰出贡献。

六、关于我国数学竞赛的几个问题

1. 要认真总结经验。既要总结成功的经验，也要总结反面的教训。特别是1956年至1977年的22年中只小规模地举行了6次数学竞赛，完全停止了16年，比匈牙利因两次世界大战而停止数学竞赛的时间长一倍多，这也从一个侧面反映了“左”的危害。要允许甚至鼓励对数学竞赛发表各种不同看法，以避免大轰大嗡、大起大落及“一刀切”。当有了缺点时，要冷静分析，划清数学竞赛内容的不合理性与工作中的缺点的界线。

2. 完善领导体制。可否设想，国家教委和中国科协通过中国数学会数学奥林匹克委员会（或其他形式的一元化领导），统一领导与协调全国各级数学竞赛活动和国际数学奥林匹克的参赛和组织培训工作。成立数学奥林匹克基金会，资助某些数学竞赛活动，奖励数学竞赛优胜者和作出贡献的领导、教练、中小学教师等。

3. 向社会作宣传。宣传数学竞赛的意义和功能，以消除误解，例如"数学竞赛是中小学生搞的智力小测验"，"这是选拔天才，冲击了正常教学"，"教师，特别是大学教师，搞数学竞赛是不务正业"等。要用事实说明数学竞赛活动的成绩。例如仅仅"文革"前的几次低层次数学竞赛中，已有一些竞赛优胜者成才了。如上海的汪嘉冈、陈志华，北京的唐守文、石赫，他们现在已经是国内的著名中年数学家，有的已获博士导师资格。他们在"文革"中都被耽误了10年，否则完全会有更大成就。

4. 处理好普及与提高的关系。数学竞赛需要分学校、市、省、全国、冬令营、集训班金字塔式地进行。前3个层次是普及型的，试题应不脱离中学数学课本范围，面向广大学生和教师。国家级竞赛及以后的活动是提高型的，参赛者的面要迅速缩小。至于冬令营和集训队，全国只能有几十个学生参加。数学奥林匹克学校要注意质量，宜办得少而精。对于参加数学学校的学生要严格挑选，不要妨碍他们德、智、体的全面发展。除冬令营和集训班需要少数数学家集中时间出试题和进行培训工作外，宜鼓励广大数学家和中小学教师利用业余时间从事数学竞赛活动，不要妨碍大家的正常工作。总之，数学竞赛的普及部分与提高部分不要对立，而要

有机地结合起来。

5. 对数学竞赛优胜者要继续进行教育和培养。一方面要充分肯定优胜者的成绩并加以鼓励。另一方面也要告诉竞赛优胜者，必须戒骄戒躁，谦虚谨慎，要成为一个好数学家或其他方面的专家，还须经过长期不懈的努力。不要将竞赛获胜看成唯一的目的，要看成鼓励前进的鞭策。还要为数学竞赛优胜者创造较好的深入学习的机会，使他们能迅速成长。例如可以考虑允许某些理工科大学在高中全国数学竞赛优胜者中，自行选拔一部分学生免试入学。

6. 对数学竞赛活动作出贡献的人员，包括组织领导者、教练与中小学教师的工作成绩要充分肯定并给予奖励。在他们的工作考核中，作为提职晋级的依据之一。

注：王元教授是中国数学理事会理事长，是我国数学竞赛组委会主席，去年31届国际数学奥林匹克竞赛在我国举行，他是主要组织者，他写了一篇总结发表在《自然杂志》第十三卷十二期上，征得王元教授同意特转载于此，供广大同行和读者参考。

第一章 分析引论

本章重点是函数、极限和连续性概念。函数是高等数学研究的主要对象，它反映客观世界量与量之间的相互依赖关系；极限概念相当抽象，其解题技巧又较高，加之它是高等数学中所有重要概念建立的基础，贯穿高等数学的始终，深刻理解并掌握极限方法很有必要；函数的连续性是高等数学研究对象的一个基本特征，它往往是讨论函数问题的一个先决条件，连续函数性质经常是解决数学问题的有力工具。读者必须花大功夫理解分析引论中的每个重要概念，并能做到融会贯通，灵活应用。

§1.1 预备知识

一、数学归纳法

假设 Q 是以自然数 n 为变量的命题。(1)存在自然数 a 使命题 Q 成立；(2)若命题 Q 对任何自然数 $b(\geq a)$ 成立，能推出 Q 对 $b+1$ 也成立。则命题 Q 对一切大于或等于 a 的自然数都成立。

二、绝对值

实数 a 的绝对值定义为

$$|a|=\begin{cases}a, & 若 a\geqslant 0\\ -a, & 若 a<0\end{cases}$$

则有 $|a|=\sqrt{a^2}$ 及不等式

$$|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$$

又 $|a|\leqslant b$ 等价于 $-b\leqslant a\leqslant b$。$|a|\geqslant b$ 等价于 $a\geqslant b$ 或 $a\leqslant -b$。

三、几个常用的不等式

（1）非负数的算术平均值不小于它们的几何平均值

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

（2）算术平均值的绝对值不超过其均方根值

$$\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right|\leqslant\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}}$$

（3）贝努利(Bernoulli)不等式

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 符号相同且均大于 (-1)。特别是

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx\quad (x>-1, n>1)$$

（4）柯西(Cauchy)不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)$$

四、解 题 示 例

例1 证明：正数的几何平均数不小于它们的调和平均数，即

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\geqslant\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$$

［证］ 对于数$\frac{1}{x_1}$，$\frac{1}{x_2}$，…，$\frac{1}{x_n}$，应用非负数的算术平均数不小于它们的几何平均数，得到

$$\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}{n}\geqslant\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}}$$

即
$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\geqslant\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$$

注：等号仅当$x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n$时成立。

例 2 求 n 项和

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}+\operatorname{arctg}\frac{1}{18}+\cdots+\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}$$

［解］ 记$S_n=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}+\cdots+\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}$，由于

$$S_1=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$$

$$S_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}=\operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}}$$

$$=\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$$

$$S_3=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}+\operatorname{arctg}\frac{1}{18}$$

$$=\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{18}=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$$

归纳出结论$S_n=\operatorname{arc\,tg}\frac{n}{n+1}$。用数学归纳法证之。

假设

$$S_k=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8}+\cdots+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2k^2}=\operatorname{arc\,tg}\frac{k}{k+1}$$

则

$$S_{k+1}=\operatorname{arc\,tg}\frac{k}{k+1}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2(k+1)^2}$$

$$=\operatorname{arc\,tg}\frac{\frac{k}{k+1}+\frac{1}{2(k+1)^2}}{1-\frac{k}{k+1}\frac{1}{2(k+1)^2}}=\operatorname{arc\,tg}\frac{k+1}{k+2}$$

因此

$$S_n=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8}+\cdots+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2n^2}=\operatorname{arc\,tg}\frac{n}{n+1}$$

对一切自然数 n 均成立。

例 3 证明不等式

$$\left|\sin\sum_{k=1}^{n}x_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\sin x_k\qquad(0\leqslant x_k\leqslant\pi;k=1,2,\cdots,n)$$

[证] 用数学归纳法。

当$k=1$时，$|\sin x_1|=\sin x_1$，等式成立。当$k=2$时，

$$|\sin(x_1+x_2)|=|\sin x_1\cos x_2+\cos x_1\sin x_2|$$
$$\leqslant|\sin x_1||\cos x_2|+|\cos x_1||\sin x_2|$$
$$\leqslant\sin x_1+\sin x_2$$

故结论正确。

假设 $k=n$ 时不等式成立，即$\left|\sin\sum_{k=1}^{n}x_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\sin x_k$。

则当$k=n+1$时，

$$\left|\sin\sum_{k=1}^{n+1}x_k\right|=\left|\sin\left(\sum_{k=1}^{n}x_k+x_{n+1}\right)\right|$$

$$=\left|\sin\sum_{k=1}^{n}x_k\cos x_{n+1}+\cos\sum_{k=1}^{n}x_k\sin x_{n+1}\right|$$

$$\leqslant\left|\sin\sum_{k=1}^{n}x_k\right|\left|\cos x_{n+1}\right|+\left|\cos\sum_{k=1}^{n}x_k\right|\left|\sin x_{n+1}\right|$$

$$\leqslant\left|\sin\sum_{k=1}^{n}x_k\right|+\sin x_{n+1}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\sin x_k+\sin x_{n+1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n+1}\sin x_k$$

即当$k=n+1$时结论也正确。

根据数学归纳法，命题成立。

§1.2 函 数

一、函 数 概 念

函数是两个非空实数集合X与Y之间的一个映射。即当$x\in X$时，按一定法则有唯一的$y\in Y$与之对应，称变量y是变量x的函数，记作$y=f(x)$.

集合X是函数$f(x)$的定义域，$f(X)$称为值域。X可为区间，也可为离散点集或某个较复杂的实数集合。

二、函 数 性 质

现在对函数$y=f(x)$ $(x\in X)$给出有界性、单调性、奇偶性和周期性等四个基本性质。

有界性：若存在M，当$x\in X$时，有$|f(x)|\leqslant M$。否则称$f(x)$是无界的。

单调性：若对于定义域X上的任意两点$x_1<x_2$，有$f(x_1)<f(x_2)$（或$f(x_1)>f(x_2)$），称$f(x)$严格单调增加（或严格单调减少）；又如果有$f(x_1)\leqslant f(x_2)$（或$f(x_1)\geqslant f(x_2)$），称$f(x)$单调增加（或单调减少）。

奇偶性：若定义域X在x轴上关于原点对称，当$x\in X$时，有$f(-x)=f(x)$，称$f(x)$为偶函数；又当$x\in X$时，有$f(-x)=-f(x)$，称$f(x)$为奇函数。

周期性：若存在$T>0$，当$x\in X$时，$f(x+T)=f(x)$，称$f(x)$是周期函数，且称具有上述性质的最小正数T为函数$f(x)$的周期。

三、复 合 函 数

设函数$y=f(u)$ $(u\in U)$与$u=g(x)(x\in X)$，且$g(X)\subseteq U$，这时y通过u可表为x的函数，称为复合函数，记作$y=f(g(x))$，u称为中间变量。

四、反 函 数

设函数$y=f(x)$，如果对于$y\in Y$，有唯一确定的$x\in X$使$f(x)=y$，则确定了x是y的函数，称为$y=f(x)$的反函数，记作$x=f^{-1}(y)$。

具有单调性的函数其反函数总是存在的。

五、初 等 函 数

下列几类函数统称为基本初等函数，它们是常数，幂函

数，指数函数，对数函数，三角函数和反三角函数。由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合步骤所构成的，由一个式子表示的函数称为初等函数。

初等函数以外的函数通常称为非初等函数。其中有分段函数，如符号函数

$$\operatorname{sign} x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

及狄里赫莱(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数}\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

还有用积分表示的函数，如

$$f(x)=\int_1^x \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x, \qquad g(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$$

以及用级数表示的函数，如

$$h(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$$

六、解 题 示 例

例 1　求下列函数的定义域。

（1）$y=f(\sin 2x)$，已知$f(x)$定义域为[0,1]；

（2）$y=f(x+a)+f(x-a)$，已知$f(x)$定义域为[0,2]；

（3）$f_n(x)=\underbrace{f(f(\cdots(f(x))))}_{n\text{次}}$，已知$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$。

［解］（1）$y=f(\sin 2x)$的定义域满足$0\leqslant\sin 2x\leqslant 1$，

故为$\left[n\pi,\ \frac{2n+1}{2}\pi\right]$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$；

（2） $y=f(x+a)+f(x-a)$的定义域满足

$$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 2\\0\leqslant x-a\leqslant 2\end{cases}$$

故当$a\leqslant 1$时，定义域为$[a,2-a]$；当$a>1$时，这个函数没有定义。

（3） 由 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$，$x\in(-1,1)$，得

$$f_2(x)=f(f(x))=\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}}=\frac{x}{\sqrt{1-2x^2}}$$

用数学归纳法可证得$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1-nx^2}}$，则定义域为$\left(-\frac{1}{\sqrt{n}},\ \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$。

例 2 设$f(x)=e^{x^2}$，$f(g(x))=1-x$，且$g(x)\geqslant 0$，求$g(x)$的表达式及定义域。

［解］ 由$f(x)=e^{x^2}$可知

$$f(g(x))=e^{g^2(x)},$$

又由$f(g(x))=1-x$，得$e^{g^2(x)}=1-x$，于是

$$g^2(x)=\ln(1-x)$$

注意$g(x)\geqslant 0$，可得

$$g(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$$

其定义域满足$\ln(1-x)\geqslant 0$，即为$x\leqslant 0$.

例 3 设$f(x)=\ln x$，且

$$g(x)=\begin{cases} x^2, & |x|\leqslant 1 \\ \dfrac{1}{x^2}, & |x|>1 \end{cases}$$

试求$g(f(x))$与$f(g(x))$.

［解］ 因为当$x>e$时$\ln x>1$，当$0<x<e^{-1}$时 $\ln x<-1$，当$e^{-1}\leqslant x\leqslant e$时$-1\leqslant \ln x\leqslant 1$，所以

$$g(f(x))=g(\ln x)=\begin{cases} \ln^2 x, & |\ln x|\leqslant 1 \\ \dfrac{1}{\ln^2 x}, & |\ln x|>1 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \ln^2 x, & e^{-1}\leqslant x\leqslant e \\ \dfrac{1}{\ln^2 x}, & x>e\text{或}0<x<e^{-1} \end{cases}$$

$$f(g(x))=\ln f(x)=\begin{cases} \ln x^2, & 0<|x|\leqslant 1 \\ -\ln x^2, & |x|>1 \end{cases}$$

例 4 若函数$f(x)(-\infty<x<+\infty)$满足

$$f(x+T)=kf(x)\quad (k,T\text{均为正常数})$$

证明$f(x)=a^x\varphi(x)$，其中a为常数，$\varphi(x)$为以T为周期的函数。

［证］ 因对任何a，$a^x>0$，令$\dfrac{f(x)}{a^x}=\varphi(x)$，于是对任何函数$f(x)(-\infty<x<+\infty)$可表为$f(x)=a^x\varphi(x)$，据已知条件，有

$$a^{x+T}\varphi(x+T)=ka^x\varphi(x)$$

记$k=a^T$，即有$a^{x+T}\varphi(x+T)=a^{x+T}\varphi(x)$，即得$\varphi(x+T)=\varphi(x)$。至此命题得证。

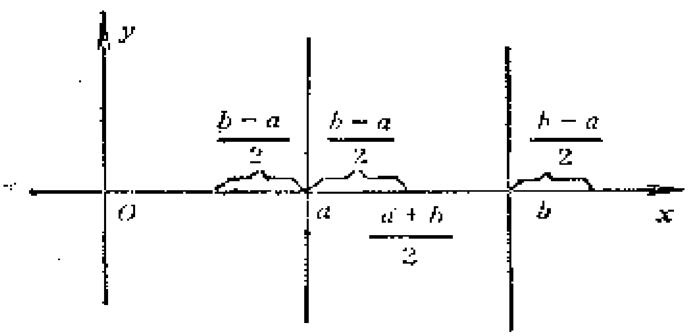
例 5 证明：若函数$f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ 的图形关于两条直线$x=a$和$x=b$ $(b>a)$对称，则函数$f(x)$为周期函数。

[分析] 由条件必有

$$f(a+x)=f(a-x)\ ,f(b+x)=f(b-x)$$

于是在a和b的中点$\frac{a+b}{2}$处，有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f\left(a-\frac{b-a}{2}\right)=f\left(b+\frac{b-a}{2}\right)$$



由此$f(x)$的周期可为

$$T=\left(b+\frac{b-a}{2}\right)$$

[证] 由条件$f(x)$关于$x=a$和$x=b$对称，即可得：对任何x，

$$f(x+2(b-a))=f[b+(x+b-2a)]=f[b-(x+b-2a)]$$
$$=f(2a-x)=f[a+(a-x)]=f[a-(a-x)]=f(x)$$

故知，$f(x)$是周期函数。

例 6 设$f(0)=0$，且$x\neq0$时$f(x)$满足

$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}\quad(a,b,c为常数,|a|\neq|b|)$$

证明$f(x)$为奇函数。

[证] 先求$f(x)$。当$x\neq0$时，令$x=\frac{1}{t}$，得

$$af\left(\frac{1}{t}\right)+bf(t)=ct$$

此等价于$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx$。与条件 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$ 联立，得

$$f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{ac}{x}-bcx\right)$$

因此

$$f(-x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{ac}{-x}-bc(-x)\right)$$

$$=-\frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{ac}{x}-bcx\right)=-f(x)$$

又$f(0)=0$，故$f(x)$为奇函数。

例 7 设$\varphi(x)$，$g(x)$，$f(x)$均为单调增加函数，试证：若$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，则$\varphi(\varphi(x))\leqslant f(f(x))\leqslant g(g(x))$。

［证］ 由 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，得$\varphi(\varphi(x))\leqslant f(\varphi(x))\leqslant g(\varphi(x))$。又因$f(x)$单调增加及 $\varphi(x)\leqslant f(x)$，有$f(\varphi(x))\leqslant f(f(x))$，因此有

$$\varphi(\varphi(x))\leqslant f(f(x))$$

同理可得$f(f(x))\leqslant g(g(x))$。至此得到

$$\varphi(\varphi(x))\leqslant f(f(x))\leqslant g(g(x))$$

例 8 已知函数$f(x)$($x\in(-\infty,\ +\infty)$)满足方程

$$z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$$

且当$y=1$时$z=x$，试求$f(x)$。

［解］ 将$y=1$，$z=x$代入$z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$得

$$x=1+f(\sqrt[3]{x}-1)$$

令$\sqrt[3]{x-1}=t$，则$x=(1+t)^3$，于是

$$(1+t)^3=1+f(t)，f(t)=(1+t)^3-1$$

即得$f(x)=(1+x)^3-1$。

例 9 证明：若对任何实数x,y有

$$|f(x)-f(y)|=|x-y|$$

且$f(0)=0$，则（1） $f(x)f(y)=xy$；（2） $f(x+y)=f(x)+f(y)$。

［证］ （1） 令$y=0$，由$f(0)=0$，方程$|f(x)-f(y)|=|x-y|$得到$|f(x)|=|x|$，从而$f^2(x)=x^2$。又知

$$|f(x)-f(y)|^2=|x-y|^2$$

$$f^2(x)-2f(x)f(y)+f^2(y)=x^2-2xy+y^2$$

即得$f(x)f(y)=xy$。

（2） 令$y=1$代入$f(x)f(y)=xy$，得$f(x)f(1)=x$，从而有

$$f(x+y)f(1)=x+y=f(x)f(1)+f(y)f(1)$$

$$=[f(x)+f(y)]f(1)$$

注意到$f^2(1)=1\neq0$，故有$f(x+y)=f(x)+f(y)$。

例10 设对任意实数x,y，有

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}\leqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

且$f(x)\geqslant0$，$f(0)=c$，证明$f(x)\equiv c$。

［分析］ 不等式$\frac{f(x)+f(y)}{2}\leqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right)$表明在任意区间$[a,b]$上，中点处的函数值大于或等于两端点函数值的算术平均值。故知曲线$y=f(x)$要么是凸的，要么是一条直线，由$f(x)\geqslant0$知曲线只能是一条水平直线$f(x)=f(0)=c$。

［证］ 先证$f(x)\geqslant c$。用反证法，假设存在点a使$f(a)<c=f(0)$，记$h=f(0)-f(a)>0$。

在题设不等式中，令$x=0$，$y=2a$，有

$$2f(a)\geqslant f(0)+f(2a)$$

即

$$f(2a)\leqslant 2f(a)-f(0)=-2(h-f(0))-f(0)=f(0)-2h$$

由归纳法可得 $f(na)\leqslant f(0)-nh$ 对任意自然数 n 成立。

由$h>0$，取适当大的n得$f(na)<0$，矛盾！故得$f(x)\geqslant c$.

再证$f(x)\equiv c$. 令$y=-x$，由题设不等式，有

$$2f(0)=2c\geqslant f(x)+f(-x)$$

因$f(x)\geqslant c\ (x\in(-\infty,\ +\infty))$，故 $f(-x)\geqslant c$，由上式必有 $f(x)=f(-x)=c$，即$f(x)\equiv c$。

§1.3 极　　限

一、极限定义及有关概念

数列$\{x_n\}$以a为极限（亦称$\{x_n\}$收敛于a），记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，定义如下：对任给的$\varepsilon>0$，存在正整数$N$，当$n>N$时，恒有$|x_n-a|<\varepsilon$。

函数极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$定义为：对任给的 $\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$。

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时为无穷小，又 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$指：对任给的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，恒有$|f(x)|>M$。此时称$f(x)$当$x\to x_0$时为无穷大（其中$M>0$为任意）。

还需注意，在自变量 x 的各种趋向下，函数 $f(x)$ 的极限及无穷小、无穷大等概念（包括数列情况）.此外，在无穷小的比较中，"阶" 的概念可以作为无穷小定义的延伸，读者也要有一个确切的理解。

二、关于极限的求法

在极限的证明与计算中，极限的有关理论、性质及运算法则是讨论问题的依据，现将其要点归纳如下

1. 极限的四则运算及复合运算法则

无穷小运算性质：有限多个无穷小的代数和，积仍为无穷小；有界函数与无穷小之积是无穷小；无穷小（不等于0）与无穷大呈倒数关系。

2. 无穷小与极限的关系

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$的充要条件是，$f(x)=A+\alpha(x)$，其中$\alpha(x)$当$x\to x_0$时是无穷小。

3. 极限存在准则

夹逼定理：设数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$、$\{z_n\}$满足

$$x_n\leqslant y_n\leqslant z_n(n\geqslant N,N\text{为某正整数})$$

且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$。

单调有界数列必有极限。

柯西(Cauchy)准则：数列$\{x_n\}$收敛的充要条件是，任给 $\varepsilon>0$，存在正整数N，当 m、$n>N$时，有 $|x_m-x_n|<\varepsilon$。

4. 极限性质

极限存在必唯一。收敛数列必有界。

比较性质：设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$。若 $a<b$，则存在 N，

当 $n>N$ 时有 $x_n<y_n$；又若存在N，当 $n>N$ 时有 $x_n\leqslant y_n$，则 $a\leqslant b$。

5． 数列极限与函数极限的关系

函数极限$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$的充分必要条件是，对任何数列$\{x_n\}$，若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$x_n\neq a(n=1,2,3,\cdots,)$则有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$。

注意，上面 2 中无穷小与极限的关系对于数列情况自然成立，而3、4中关于数列所述诸结论中，对于自变量连续变化的函数有类似叙述。

极限的证明与计算是高等数学的基本训练，其方法很多，技巧性也很高。除运用极限定义、基本性质及运算法则等有关理论外，还常运用两个重要极限，无穷小代换定理，洛必大法则，台劳公式。此外还可运用求和公式、级数收敛性质，导数与定积分定义等各种方法。我们在本节给出一些例题，对于极限求法的系统研究，将在第五章后的系列练习中讨论。

三、二元函数的极限

二元函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)的极限$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=A$是指：对任给的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$时，恒有$|f(x,y)-A|<\varepsilon$。

而$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$与$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$称为累次极限。

四、解 题 示 例

例 1 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\times3\cdots(2n-1)}{2\times4\cdots(2n)}$。

［解］　因$0<x_n=\dfrac{1\times3\cdots(2n-1)}{2\times4\cdots(2n)}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}$

$$<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}=y_n$$

则$x_n^2<x_ny_n=\dfrac{1}{2n+1}$，于是$0<x_n<\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}}$ 。

因此，任给$\varepsilon>0$，存在$N=\left[\dfrac{1}{2\varepsilon}-\dfrac{1}{2}\right]$(表示整数部分)，当$n>N$时，有

$$\left|\frac{1\times3\cdots\times(2n-1)}{2\times4\cdots\times(2n)}\right|=|x_n|<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}<\varepsilon$$

即得　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\times3\cdots(2n-1)}{2\times4\cdots(2n)}=0$。

例 2　若$x_n\leqslant a\leqslant y_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$，试证$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.

［证］　因$\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$，即任给$\varepsilon>0$，存在$N$，当$n>N$时，有$|y_n-x_n|<\varepsilon$，即有

$$x_n-\varepsilon<y_n<x_n+\varepsilon$$

由$x_n\leqslant a\leqslant y_n$及上式右边不等式，得

$$a-\varepsilon<a\leqslant y_n<x_n+\varepsilon<a+\varepsilon$$

从而$|y_n-a|<\varepsilon$，即$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$。因此

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}[y_n-(y_n-x_n)]=\lim_{n\to\infty}y_n-\lim_{n\to\infty}(y_n-x_n)=a$$

例 3　计算

（1）　$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{x-1})}{\arcsin2\sqrt[3]{x^2-1}}$；

（2） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-e^{x}}{x-\sin x}$；

（3） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(a+x)\operatorname{tg}(a-x)-\operatorname{tg}^2 a}{1-\cos x}$

［解］ 这几个极限都是无穷小的比，似乎要用洛必大法则，但这样计算较麻烦。如果考虑到它们各自的等价无穷小，~~运用无穷小代换定理和初等恒等变形更适宜。~~

（1） $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{x-1})}{\arcsin 2\sqrt[3]{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{2\sqrt[3]{x^2-1}}$ Y/N?

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{2\sqrt[3]{x+1}}=\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$$

（2） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-e^{x}}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}(e^{\sin x-x}-1)}{x-\sin x}$ 泰勒展开

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}(\sin x-x)}{x-\sin x}=-1$$

有上述问题

（3） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(a+x)\operatorname{tg}(a-x)-\operatorname{tg}^2 a}{1-\cos x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{x^2}{2}}\left(\frac{\operatorname{tg}^2 a-\operatorname{tg}^2 x}{1-\operatorname{tg}^2 a\operatorname{tg}^2 x}-\operatorname{tg}^2 a\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x^2}\left(\frac{\operatorname{tg}^2 a-\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}^2 a+\operatorname{tg}^4 a\operatorname{tg}^2 x}{1-\operatorname{tg}^2 a\operatorname{tg}^2 x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{tg}^2 x}{x^2}\,\frac{1}{1-\operatorname{tg}^2 a\operatorname{tg}^2 x}(\operatorname{tg}^4 a-1)=2(\operatorname{tg}^4 a-1)$$

例 4 求 $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]$。

[解]　令 $x=\frac{1}{y}$，则 $\left[\frac{1}{x}\right]=[y]$，又 $y=[y]+r, 0\leqslant r<1$。于是得

$$\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]=\lim_{y\to\infty}\frac{y-r}{y}=1$$

例 5　设数列 $\{x_n\}$ 符合规律 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$，其中 $x_1>0$，$a>0$，证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求其值。

[证]　由于对任何 n，有

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)\geqslant\sqrt{x_n\cdot\frac{a}{x_n}}=\sqrt{a}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)}{x_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{x_n^2}\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{(\sqrt{a})^2}\right)=1$$

故数列 $\{x_n\}$ 单调下降且有界，由收敛准则知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在。

令 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$，由

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$$

得　$A=\frac{1}{2}\left(A+\frac{a}{A}\right)$，从而 $A=\sqrt{a}$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\sqrt{a}$。

例 6　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{(nx+i)(nx+i+1)}$　$(x\geqslant 0)$。

[解]　记 $A_n=\frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{(nx+i)(nx+i+1)}$

$$B_n=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(nx+i)(nx+i)}=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(nx+i)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x+\frac{i}{n}\right)$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} B_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x+\frac{i}{n}\right)=\int_0^1(x+u)\,\mathrm{d}u=x+\frac{1}{2}$

又

$$0<A_n-B_n=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{(nx+i)(nx+i+1)}-\sqrt{(nx+i)(nx+i)}\right)$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{nx+i}\left(\sqrt{nx+i+1}-\sqrt{nx+i}\right)$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{nx+i}}{\sqrt{nx+i+1}+\sqrt{nx+i}}$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{nx+i}}}<\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot n=\frac{1}{2n}$$

于是得 $\lim\limits_{n\to\infty}(A_n-B_n)=0$，从而

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}B_n=x+\frac{1}{2}$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{(nx+i)(nx+i+1)}=x+\frac{1}{2}$

例 7 设 $\lim\limits_{x\to a}u(x)=1$，$\lim\limits_{x\to a}v(x)=\infty$，证明

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}=\exp\left(\lim_{x\to a}[u(x)-1]v(x)\right)$$

并由此结论计算

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$,

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a_i>0, i=1,2,\cdots,n)$.

[证] $\lim\limits_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}=\lim\limits_{x\to a}\{[1+u(x)$

$$-1]^{\frac{1}{u(x)-1}}\}^{[u(x)-1]v(x)}$$

$$=\exp\left(\lim_{x\to a}[u(x)-1]v(x)\right)$$

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$

$$=\exp\left(\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)x\right)$$

$$=\exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}}\right)$$

$$=\exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\left(\cos\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2}}\right)=e$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$

$$=\exp\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}-1\right)\frac{1}{x}\right)$$

$$=\exp\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x-1+a_2^x-1+\cdots+a_n^x-1}{n}\right)\frac{1}{x}\right)$$

$$=\exp\left(\frac{1}{n}\lim_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x-1}{x}+\frac{a_2^x-1}{x}+\cdots+\frac{a_n^x-1}{x}\right)\right)$$

$$= \exp\left(\frac{1}{n}[\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n]\right) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

例 8 设函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{当 } x \text{ 为有理数} \\ x^2 + x, & \text{当 } x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

证明，当$x_0 \neq 0$时，极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$不存在。

［证］ 取数列$\{x_n'\}$：x_n'为有理数，$\lim\limits_{n \to \infty} x_n' = x_0$，则$f(x_n')$ $= (x_n')^2$，$\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n') = \lim\limits_{n \to \infty}(x_n')^2 = x_0^2$。

又取无理数列$\{x_n''\}$，$\lim\limits_{n \to \infty} x_n'' = x_0$，则

$$f(x_n'') = (x_n'')^2 + x$$

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n'') = \lim_{n \to \infty}[(x_n'')^2 + x_n''] = x_0^2 + x_0$$

由上得知，$\lim\limits_{n \to \infty} x_n' = \lim\limits_{n \to \infty} x_n'' = x_0 (x_0 \neq 0)$，但$\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n') \neq$ $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n'')$。根据函数极限与数列极限的关系，得 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在。

例 9 证明

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \frac{x + y}{x^2 - xy + y^2} = 0$$

［证］ 因为$x^2 + y^2 \geqslant 2xy$，故

$$x^2 - xy + y^2 \geqslant \frac{x^2 + y^2}{2}, \quad |x + y| \leqslant \sqrt{2(x^2 + y^2)}$$

所以

$$\left|\frac{x + y}{x^2 - xy + y^2}\right| \leqslant \frac{\sqrt{2(x^2 + y^2)}}{\frac{x^2 + y^2}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

而 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$，因此得 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2} = 0$。

问题：以下做法对吗？

$$x^2-xy+y^2 = \frac{x^2+y^2}{2} + \frac{x^2-2xy+y^2}{2} = \frac{x^2+y^2}{2}$$

$$+\frac{(x-y)^2}{2} \geqslant \frac{x^2+y^2}{2} = \frac{x^2+y^2}{4} + \frac{x^2+y^2}{4}$$

$$\geqslant \frac{x^2+y^2+2xy}{4} = \frac{(x+y)^2}{4}$$

$\therefore \leq$ 原 $\leq \frac{2x}{x^2}+\frac{2y}{y^2}$

$\therefore$ 原极限 $\to 0$

所以

$$\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right| \leqslant \frac{|x+y|}{\dfrac{(x+y)^2}{4}} = \frac{4}{|x+y|}$$

而 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{4}{|x+y|} = 0$，故得 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2} = 0$。

不一定 ?

结论是否定的？（为什么？）

例10 设 $f(x,y) = (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$，证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$，而 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ 不存在。

［解］ 因为

$$\left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right| \leqslant |x+y| \leqslant \sqrt{2(x^2+y^2)}$$

所以，任给 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon/\sqrt{2}$，当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时，有

$$\left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right| \leqslant \sqrt{2(x^2+y^2)} < \sqrt{2}\,\delta = \varepsilon$$

由极限定义，得

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}=0$$

以下讨论累次极限

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

因$\lim\limits_{y\to 0} y\sin\frac{1}{y}=0$，故$\lim\limits_{y\to 0} y\sin\frac{1}{x}\lim\frac{1}{y}=0$。但当$x\neq\frac{1}{n\pi}$

(n为整数)，$y\neq 0$，有$\lim\limits_{y\to 0} x\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$不存在。于是

$\lim\limits_{y\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$不存在，从而

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

不存在。

同理$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$不存在。

§1.4 函数的连续性

一、函数的连续性

设函数$f(x)$在区间(a,b)上有定义，$x_0\in(a,b)$，若

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称$f(x)$在点$x_0$连续。$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

等价于

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x)$$

上式中的两等式分别称为$f(x)$在x_0右连续和左连续。

函数$f(x)$在(a,b)上连续，指它在(a,b)内每点都连续。$f(x)$在$[a,b]$上连续指它在(a,b)内连续，且在点a右连续及点b左连续。

初等函数在其定义域内都连续。

在(a,b)内单调连续函数的反函数也是单调连续函数。

二、间 断 点

函数$f(x)$如果在点x_0不连续就说它在点x_0间断。即在x_0函数$f(x)$出现下列三种情况之一者，x_0为间断点：

（1） $f(x)$在x_0无定义(但在x_0的某邻域内其它点处有定义)；

（2） $f(x)$在点x_0有定义，但$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在；

（3） $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$和$f(x_0)$都存在但不相等。

根据上述三种情况可将间断点分为两类：左、右极限都存在的间断点叫做第一类间断点，特别称极限存在的间断点为可去间断点，此时只要对该点重新定义函数值就可成为连续点。不是第一类的间断点叫做第二类间断点。

三、闭区间上连续函数性质

（1） 最大最小值定理：设$f(x)$在$[a,b]$上连续，则$f(x)$在$[a,b]$上必有最大值与最小值。

（2） 介值定理：$f(x)$在$[a,b]$上连续，则对于$f(a)$与$f(b)$之间的任一值μ，必有$\xi\in(a,b)$，使$f(\xi)=\mu$。

介质定理的特例——零值定理：$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(a)f(b)<0$，则必有$\xi\in(a,b)$，使$f(\xi)=0$。

四、解题示例

例1 设函数

$$f(x)=\begin{cases} x^n\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

试讨论 n 为何值时，在点 $x=0$ 处，（1）$f(x)$ 连续；（2）$f(x)$ 可导；（3）$f'(x)$ 连续。

［解］（1）为使 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，即

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$$

$$\lim_{x\to 0}x^n\sin\frac{1}{x}=0$$

条件为 $n>0$。

（2）为使

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^n\sin\dfrac{1}{\Delta x}-0}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^{n-1}\sin\frac{1}{\Delta x}$$

存在，条件为 $n>1$。此时 $f'(0)=0$。

（3）因 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=nx^{n-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{n-2}\cos\dfrac{1}{x}$，故

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\left(nx^{n-1}\sin\frac{1}{x}-x^{n-2}\sin\frac{1}{x}\right)$$

所以当 $n>2$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=f'(0)=0$，即 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

例 2 设 $f(x)=\mathrm{sgn}\,x$（符号函数），$g(x)=x(1-x^2)$，研究$f[g(x)]$与$g[f(x)]$的连续性。

［解］

$$f(x)=\mathrm{sgn}\,x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0,\end{cases}$$

$$\mathrm{sgn}[x(1-x^2)]=\begin{cases}-1, & x(1-x^2)<0\\ 0, & x(1-x^2)=0\\ 1, & x(1-x^2)>0\end{cases}$$

即

$$f(g(x))=\mathrm{sgn}[x(1-x^2)]$$
$$=\begin{cases}-1, & 1<x<\infty，或-1<x<0\\ 0, & x=0,1,-1\\ 1, & 0<x<1或-\infty<x<-1\end{cases}$$

于是$x=-1,0,1$是$f[g(x)]$的第一类间断点。

又$g[f(x)]=\mathrm{sgn}\,x[1-(\mathrm{sgn}\,x)]\equiv 0$，故它在全数轴上连续。

例 3 设 $y=f(u)=\begin{cases}u^2, & u\leqslant 1\\ 2-u, & u>1,\end{cases}$

$$u=g(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 1\\ x+4, & x>1\end{cases}$$

研究函数$f[g(x)]$的连续性。

［解］ 因为

$$y=f[g(x)]=\begin{cases}g^2(x), & g(x)\leqslant 1\\ 2-g(x), & g(x)>1\end{cases}$$

又由$g(x)$的表达式知，当 $x\leqslant 1$ 时，$g(x)\leqslant 1$；当 $x>1$ 时，

$g(x)\geqslant 5>1$，所以

$$y=f[g(x)]=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 1 \\ -x-2, & x>1 \end{cases}$$

显然，$f[g(x)]$在$x=1$为第一类间断点。

例 4 试证单调有界函数的间断点只能是第一类间断点。

〔证〕 不妨设$f(x)$单调增加，x_0为间断点。当$x<x_0$时，$f(x)$单调增加有上界，故$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)$存在；$f(x)$随$x$减小而减小且有下界，故$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)$存在。注意$x_0$是间断点，$f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$。即得$x_0$为第一类间断点。

例 5 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$0\leqslant f(x)\leqslant 1$，证明必有$\xi\in[0,1]$，使$f(\xi)=\xi$。

〔证〕 若$f(0)=0$，取$\xi=0$。若$f(1)=1$，取$\xi=1$。

若$f(0)>0$，$f(1)<1$，则令$g(x)=f(x)-x$，必有$g(x)$在$[0,1]$上连续，$g(0)g(1)<0$，应用零值定理，有$\xi\in(0,1)$，使$g(\xi)=0$，即$f(\xi)=\xi$。

例 6 设$f(x)$在$[0,n]$（n为自然数，$n\geqslant 2$）上连续，$f(0)=f(n)$，证明存在$\xi,\xi+1\in[0,n]$，使$f(\xi)=f(\xi+1)$。

〔分析〕 要证有ξ使$f(\xi)=f(\xi+1)$，即要证函数$g(x)=f(x+1)-f(x)$有根ξ。

〔证〕 令$g(x)=f(x+1)-f(x)$，则它在$[0,n-1]$上连续。于是

$$g(i)=f(i+1)-f(i),\quad i=0,1,\cdots,n-1$$

记$m=\min\limits_{0\leqslant i\leqslant n}\{g(i)\}$，$M=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n}\{g(i)\}$，则

$$m\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}g(i)\leqslant M$$

又 $\sum\limits_{i=0}^{n-1}g(i)=f(n)-f(0)=0$

对函数$g(x)$应用介值定理，知存在$\zeta\in[0,n-1]$，使$g(\zeta)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}g(i)=0$，即存在$\zeta,\zeta+1\in[0,n]$，使$f(\zeta+1)=f(\zeta)$。

例 7 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$a<c<d<b$，证明存在$\zeta\in[a,b]$，使

$$(\alpha+\beta)f(\zeta)=\alpha f(c)+\beta f(d)$$

［分析］ 结论变形为

$$f(\zeta)=\frac{\alpha f(c)+\beta f(d)}{\alpha+\beta}\overset{记}{=\!=}\mu$$

表明$f(x)$在ζ的函数值为μ，由此可联想到用连续函数介值定理。

［证］ 由最大最小值定理，记m,M分别是$f(x)$在$[a,b]$上的最小值、最大值，得$m\leqslant f(x)\leqslant M$，$x\in[a,b]$，于是

$$(\alpha+\beta)m\leqslant\alpha f(c)+\beta f(d)\leqslant(\alpha+\beta)M$$

$$m\leqslant\frac{\alpha f(c)+\beta f(d)}{\alpha+\beta}\leqslant M$$

应用连续函数介值定理，存在$\zeta\in[a,b]$，使

$$f(\zeta)=\frac{\alpha f(c)+\beta f(d)}{\alpha+\beta}$$

即 $$(\alpha+\beta)f(\zeta)=\alpha f(c)+\beta f(d)$$

例 8 设函数$f(x)$在全数轴上连续，且$f[f(x)]=x$，证明存在点ζ，使$f(\zeta)=\zeta$。

［证］ 用反证法，若在全数轴上不存在点 ξ，使 $f(\xi)=\xi$，即对任意实数x均有$f(x)\neq x$。因 $f(x)$ 连续，不妨设恒有 $f(x)>x$。于是得 $f[f(x)]>f(x)>x$。这与已知 $f[f(x)]=x$矛盾。故必存在点ξ，使$f(\xi)=\xi$。

例 9 设

$$F(x,t)=\left(\frac{x-1}{t-1}\right)^{\frac{t}{x-t}},\quad ((x-1)(t-1)>0,\ x\neq t)$$

讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}F(x,t)$ 的连续区间和间断点，并画$y=f(x)$的草图。

［解］ 因为

$$f(x)=\lim_{t\to x}F(x,t)=\lim_{t\to x}\left(\frac{x-1}{t-1}\right)^{\frac{t}{x-t}}$$

ln x ~ x-1

$$=\exp\left(\lim_{t\to x}\left(\frac{x-1}{t-1}-1\right)\frac{t}{x-t}\right)$$

$$=\exp\left(\lim_{t\to x}\left(\frac{x-t}{t-1}\right)\left(\frac{t}{x-t}\right)\right)=\exp\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

所以$x=1$为间断点，连续区间$(-\infty,1)$及$(1,+\infty)$。

又由

$$\lim_{x\to 1+0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}e^{\frac{x}{x-1}}=\infty$$

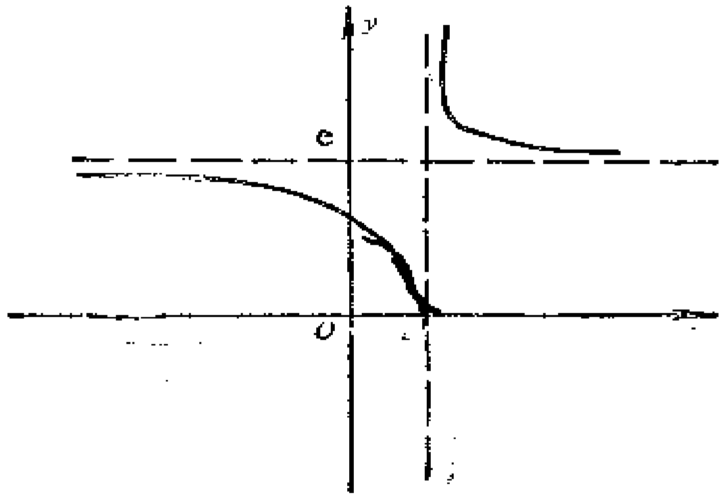
$$\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1-0}e^{\frac{x}{x-1}}=0$$

故知$x=1$为函数$f(x)$的第二类间断点。

利用

$$f'(x)=e^{\frac{x}{x-1}}\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right)<0$$

得知 $f(x)$ 单调减少。且 $\lim\limits_{x\to\infty}=e$，知 $y=e$ 为 $y=f(x)$ 的一条水平渐近线。由此可画出 $y=f(x)=e^{\frac{x}{x-1}}$ 的草图如下。



自 我 测 试 题

1． 证明：函数 $f(x)=a^x(a>0)$，若自变量 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 组成等差级数，则 $y_n=f(x_n)\ (n=1,2,\cdots)$ 组成一等比级数。

2． 讨论函数 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{1+(2\sin x)^{2n}}$ 的连续区间，如有间断点，指出其类型。

3． 设

$$f(x)=\begin{cases}2\cos x, & x\leqslant c\\ ax^2+b, & x>c\end{cases}$$

其中 b、c 是已知常数，试确定 a 值，使 $f(x)$ 为连续函数。

4. 计算下列极限。

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x}\right)^{\operatorname{ctg}^3 x}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{n}\right)^n$，$|a|<1$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$

5. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2^{k+\frac{1}{k}}}{2^n-1}$。 2 $x\to 1$ 5 T

6. 证明方程 $\dfrac{5}{x-1}+\dfrac{7}{x-2}+\dfrac{16}{x-3}=0$，在1与2，2与3之间必有根。 (1、2) 有

7. 设 $x_0>0$， $x_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(2x_n+\dfrac{a}{x_n^2}\right)(n=0,1,\cdots)$，$a>0$ 常数，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其值。

8. 设 $a_1=3$，$a_n=2a_{n-1}^2-1\,(n\geqslant 2)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{2^n\cdot a_1a_2\cdots a_{n-1}}$。

9. 证明：若曲线 $y=f(x)$ 在 R 上关于点 $A(a,y_0)$ 和直线 $x=b\,(b>a)$ 都对称，则函数 $f(x)$ 是 R 上的周期函数。

10. 证明：若对任意 x,y 有 $f(y)-f(x)\leqslant(y-x)^2$，则对任意 $n\in N$，任意 a,b 有

$$|f(b)-f(a)|\leqslant\frac{1}{n}(b-a)^2$$

11. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，又设 $f(x)$ 只取有理数，且

$f\left(\frac{1}{2}\right)=2$，证明$f(x)\equiv 2$。

12． 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$f(0)=f(1)$．求证：（1）存在$x\in[0,1]$使$f(x)=f\left(x+\frac{1}{2}\right)$；

（2）对任何正整数n，存在$x\in[0,1]$，使$f(x)=f\left(x+\frac{1}{n}\right)$。

答 案 与 提 示

2． $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$，$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$为第一类间断点。

3． $c\neq 0$时$a=\frac{2\cos c-b}{c^2}$，$c=0$时只当$b=2$有解，此时，a可任意。

4． (1)$e^{\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}}$，(2)$e^{\frac{1}{1-a}}$，(3)$\frac{1}{4}$。

5． 2

7． $\sqrt[3]{a}$。

8． 由$a_n^2-1=2[2^n\cdot a_1\cdot a_2\cdots a_{n-1}]^2$，$a_n>1$，

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a_n}{2^n\cdot a_1\cdot a_2\cdots a_{n-1}}\right]=\sqrt{2}.$$

9． $\begin{cases} y_0=\dfrac{f(a-x)+f(a+x)}{2} \\ f(b-x)=f(b+x) \end{cases}$， 周期$T=4(b-a)$．

10． $a=b$ 显然，$a\neq 0(a<b)$，等分$[a,b]$，分点为 $a+\frac{k(b-a)}{n}$，$k=0,1,2,\cdots n$，有

$$|f(b)-f(a)|=\left|\sum\left[f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.-f\left(a+\frac{(k-1)(b-a)}{n}\right)\right]\right|$$

推出。

11． 用反证法，注意$f(x)$在闭区间上连续，其值域也必连续，且实数具有稠密性。

第二章 微分学

微分学是高等数学的主要内容之一。本章将一元函数与多元函数微分学的一些相应部分用一种统一和相互对照的形式进行叙述，通过简捷处理，以便于读者较好且本质地理解微分学基本概念和重要理论，熟练地掌握计算，并加强综合应用能力。本章还含有向量代数及空间解析几何的内容。

§2.1 向量代数与空间解析几何

一、向量及其运算

1. 空间直角坐标系

过空间定点O作三条互相垂直的数轴Ox，Oy和Oz，就构成空间直角坐标系。如果空间中一点M在空间直角坐标系中的坐标为x（横标）、y（纵标）、z（竖轴），则M记为$M(x,y,z)$。三个坐标面将空间分成八个卦限。

两点$M_1(x_1,y_1,z_1)$与$M_2(x_2,y_2,z_2)$之间的距离

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

特别是，$M(x,y,z)$到原点的距离$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。

如果以点$M_1(x_1,y_1,z_1)$和$M_2(x_2,y_2,z_2)$为端点的线段被点$N(x,y,z)$分成定比λ，则N的坐标

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$

特别是，线段 M_1M_2 中点的坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}$$

2. 向量概念及表示法

既有大小又有方向的量称为向量，用有向线段 $\overrightarrow{AB}$ $(A \nearrow B)$ 表示，线段的长度 $|\overrightarrow{AB}|$ 称为向量的模（即大小），从 A 到 B 的方向表示向量的方向。向量也记作 $\boldsymbol{a}$，其模记作 $|\boldsymbol{a}|$。

模为 1 的向量称为单位向量。模为 0 的向量称为零向量，记作 $\boldsymbol{0}$，与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相等且方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{a}$。

若在直角坐标系中，$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}$，$O$ 为原点及 $M(x,y,z)$，则记

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}$$

称为向量的坐标表示。

设向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，则 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$。记 $\boldsymbol{a}$ 的方向角为 α,β,γ（$\boldsymbol{a}$ 与 x 轴，y 轴，z 轴正方向夹角），则 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|},\quad \cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|},\quad \cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}$$

且有 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

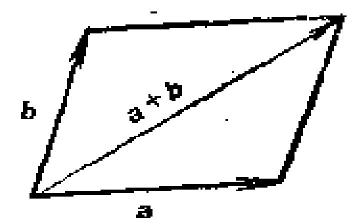
设 $M_i(x_i,y_i,z_i)\ (i=1,2)$，则

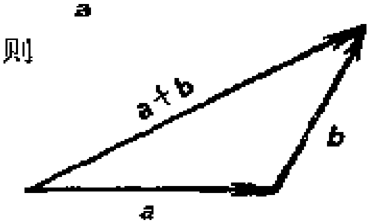
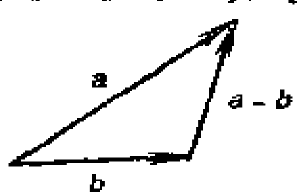
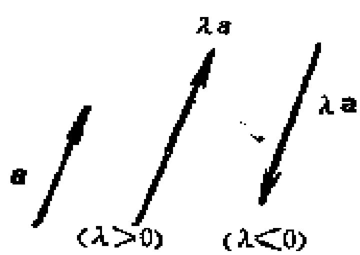
$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$$

两向量相等指二者模相等且方向相同，即它们的坐标分别对应相等。

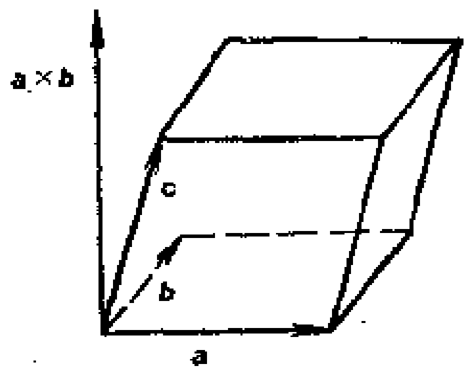
3．向量运算

在下述各种运算中，假定 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，$\boldsymbol{c}=\{c_x,c_y,c_z\}$．它们的线性运算和乘法运算可列表如下：

<table>
<tr><th>运算名称</th><th>运算定义、坐标表示及几何表示</th><th>运算规律及常用公式</th></tr>
<tr><td>向量加法
$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$</td><td>$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z\}$
平行四边形法则


三角形法则

</td><td>$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$
$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$
$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$
$\lvert\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\rvert\leqslant\lvert\boldsymbol{a}\rvert+\lvert\boldsymbol{b}\rvert$</td></tr>
<tr><td>向量减法
$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$</td><td>$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\{a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z\}$

</td><td>$\lvert\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\rvert\geqslant\lvert\boldsymbol{a}\rvert-\lvert\boldsymbol{b}\rvert$</td></tr>
<tr><td>数乘 $\lambda\boldsymbol{a}$
（λ实数）</td><td>$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}$

</td><td>$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$
$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$
$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$
向量分解 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，
其中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为 x 轴，y 轴，z 轴正方向上的单位向量．</td></tr>
</table>

续表

运算名称	运算定义、坐标表示及几何表示	运算规律及常用公式
数量积 $a\cdot b$	$a\cdot b=\|a\|\|b\|\cos\theta$ (θ为a,b夹角，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$) $a\cdot b=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$	$a\cdot b=b\cdot a$ $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ $(\lambda a)\cdot b=\lambda(a\cdot b)$ $a\cdot a=\|a\|^2$ $a\cdot b=0$当且仅当$a\perp b$
向量积 $a\times b$	$\begin{cases}\|a\times b\|=\|a\|\|b\|\sin\theta(\theta\text{同上})\\ a\times b\perp a\text{及}b\text{，且}a、b、a\times b\text{构成}\\ \text{右手系}\end{cases}$ $a\times b=\left\{\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\right\}$	$a\times b=-b\times a$, $(\lambda a)\times b=\lambda(a\times b)$ $=a\times(\lambda b)$ $(a+b)\times c=a\times c+b\times c$ $a\times a=0$ $a\times b=0$当且仅当$a//b$
三向量混合积 $a\cdot(b\times c)$	$a\cdot(b\times c)=(abc)$ $=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$  $\|abc\|$等于以a,b,c为边的平行六面体体积.	(i)$a\cdot(b\times c)$ $=b\cdot(c\times a)$ $=c\cdot(a\times b)$ $=-a\cdot(c\times b)$ $=-b\cdot(a\times c)$ $=-c\cdot(b\times a)$ (轮换性) (ii)a,b,c共面的充要条件是 $(abc)=0$ (iii)$(a_1+a_2)bc)$ $=(a_1bc)+(a_2bc)$ $((\lambda a)bc)=\lambda(abc)$

续表

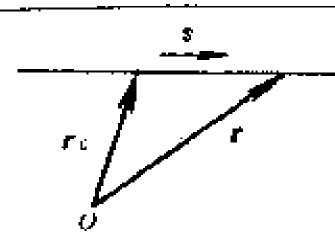
运算名称	运算定义、坐标表示及几何表示	运算规律及常用公式
三重向量积 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ $=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ $=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})$ $+\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=0$ $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})$ $=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})$ $-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$

二、空间中的平面与直线

1. 平面方程

名　称	方　　　程	说　　　明
点法式	$A(x-x_0)+B(y-y_0)$ $+C(z-z_0)=0$ (A,B,C不同时为0)	平面过点$M_0(x_0,y_0,z_0)$，法向量$\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$.
三点式	$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0$	平面通过三点$M_i(x_i,y_i,z_i)$ $i=1,2,3$.
截距式	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$	平面在三坐标轴上的截距分别为a,b,c.
一般式	$Ax+By+Cz+D=0$ (A,B,C不同时为0)	法向量$\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$
法　式	$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=P$ 或 $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=P$	$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$， $M(x,y,z)$是平面上动点， $\boldsymbol{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$是法向量，$P$为原点到平面的距离.

2. 直线方程

名称	方程	说明
标准式	$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ l, m, n不同时为0	直线通过点$M_0(x_0, y_0, z_0)$，方向向量$s=\{l, m, n\}$
参数方程	$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases}$ （t参数）	（同上）
两点式	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$	直线通过二点 $M_i(x_i\ \ y_i\ \ z_i)$ $i=1, 2$
一般式	$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$	方向向量 $s=\left\{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right\}$
向量式	$r=r_0+ts$ （t 参数）	

3. 点、直线与平面的相互关系

点$M_1(x_1, y_1, z_1)$到平面$Ax+By+Cz+D=0$(过M_0，法向量n)的距离

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M_1}\cdot n|}{|n|}=\frac{|Ax_1+By_2+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

点$M_1(x_1,y_1,z_1)$到直线$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$的距离

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M_1}\times \mathbf{s}|}{|\mathbf{s}|}$$

$$=\pm\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix}\Big/\sqrt{l^2+m^2+n^2}$$

关于平面与平面，直线与直线，直线与平面之间的夹角，平行条件，垂直条件等，都可以由它们的法向量、方向向量之间的关系不难解决，最后给出三平面$A_ix+B_iy+C_iz+D_i(i=1,2,3)$共线的条件为矩阵

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

的秩为 2。

三、空间的曲面与曲线

空间中满足一个三元方程式$F(x,y,z)=0$的点的轨迹常常构成一个曲面，空间曲线可以看成两个曲面的交线，其一般方程为

$$l:\ \begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

消去联立方程中的变量z，再与$z=0$联立，即可得曲线l在xoy面上的投影曲线。空间曲线也可用参数方程表示

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t)\quad (参数t)$$

如螺旋线方程

$$x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad z=kt$$

下面我们列出一些常见的曲面。

球面

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

二次方程 $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$ 若有轨迹，则是球面。

椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

椭圆锥面($a=b$为圆锥面)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

椭圆抛物面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2cz$$

双曲抛物面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$

单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

椭圆柱面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

抛物柱面

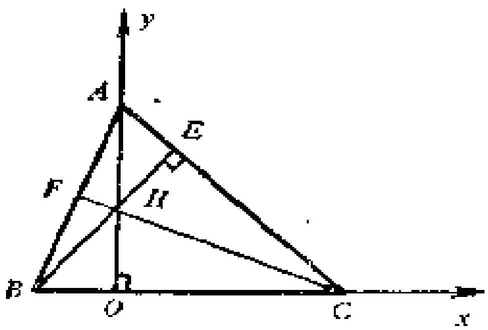
$$y^2=2px$$

双曲柱面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

四、解 题 示 例

例 1 证明三角形的三条垂线相交于一点。



[证法 1] 设 $\triangle ABC$ 的两条垂线 AO 和 BE 交于点 H。连 CH 延长交 AB 于 F。

由假设，向量 $\overrightarrow{AH}$ 垂直于 $\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{BH}$ 垂直于 $\overrightarrow{AC}$，故

于 $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CB}=0$，$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{CH}\ (\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})\\&=\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CB}\\&=(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BH})\cdot\overrightarrow{AC}+(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AH})\cdot\overrightarrow{CB}\\&=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}\\&=\overrightarrow{CB}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA})=0\end{aligned}$$

即 $\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$。说明三垂线交于一点。

[证法 2] 建立坐标系如图（O 为原点，OC 和 OA 分别为 x 轴和 y 轴。则 $A(0,a)$，$B(b,0)$，$C(c,0)$，垂线 AD 和 BE 的交点 $H(0,y)$。由于 $\overrightarrow{AC}$ 垂直于 $\overrightarrow{BH}$，且 $\overrightarrow{AC}=\{c,-a\}$，$\overrightarrow{BH}=\{-b,y\}$，故由

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BH}=-bc-ay=0$$

得 $$y=-\frac{bc}{a}$$

这时$\overrightarrow{CH}=\left\{-c,\ \frac{-bc}{a}\right\}$，$\overrightarrow{AB}=\{b,-a\}$。所以

$$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=-bc+bc=0$$

即$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$。

例 2 指出下面解法中的错误，并给出正确解法。

[问题] 求过直线

$$L:\ \begin{cases}x-2y-z+3=0\\x+y-z-1=0\end{cases}$$

且与平面π：$x-2y-z=0$垂直的平面方程。

[解法] 设所求平面的方程为

$$(x-2y-z+3)+\lambda(x+y-z-1)=0 \qquad (*)$$

即$(1+\lambda)x+(-2+\lambda)y+(-1-\lambda)z+(3-\lambda)=0$，其中$\lambda$为待定常数。由于所求平面与平面$\pi$垂直，于是应有$(1+\lambda)+(-2+\lambda)(-2)+(-1-\lambda)(-1)=0$，得$6=0$。矛盾，说明所求平面不存在。

[分析] 直线L是平面π_1：$x-2y-z+3=0$与π_2：$x+y-z-1=0$的交线。而π_1，π_2的法向量分别为$\boldsymbol{n}_1=\{1,-2,-1\}$，$\boldsymbol{n}_2=\{1,1,-1\}$。由于$\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0$，故$\pi_1\perp\pi_2$。注意平面$\pi$的法向量$\boldsymbol{n}=\{1,-2,-1\}=\boldsymbol{n}_1$，所以$\pi\parallel\pi_1$，因此过直线L且与平面$\pi$垂直的平面正好就是平面$\pi_2$。

在上述解法中，把所求平面设为(*)式，但(*)式并不包含平面π_2：$x+y-z-1=0$。因此无法用(*)式定λ来求

所求平面。

此题的正确解法如下。

［解］ 设过L的平面束为

$$\lambda_1(x-2y-z+3)+\lambda_2(x+y-z-1)=0$$

即 $(\lambda_1+\lambda_2)x+(-2\lambda_1+\lambda_2)y+(-\lambda_1-\lambda_2)z+3\lambda_1-\lambda_2=0$

利用所求平面与π垂直，法向量的数量积为0，即有

$(\lambda_1+\lambda_2)+(-2\lambda_1+\lambda_2)(-2)+(-\lambda_1-\lambda_2)(-1)=0$

得$\lambda_1=0$。因此所求平面方程为$x+y-z-1=0$。

例 3 求直线

$$l: \begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$$

在球面$x^2+y^2+z^2-2x-2=0$上点$(2,1,1)$处的切平面上的投影方程。

［解］ 球面$x^2+y^2+z^2-2x-2=0$在$(2,1,1)$点处的切平面方程为π_1: $x+y+z-4=0$。

过已知直线作一平面π_2垂直于切平面，那么两平面的交线即为所求的投影。

设

$$\pi_2: \ Ax+By+Cz+D=0$$

因$\pi_1\perp\pi_2$，故$A+B+C=0$。又l在π_2上，在l上任取两点，比如$(0,0,-1)$，$(0,1,0)$，代入π_2，得

$$-C+D=0, \ B+D=0$$

解得$D=C$，$B=-D$。

注意到$A+B+C=0$，得$A=0$，$B=-D$，$C=D$。故

$$\pi_2: \ y-z-1=0$$

因此所求投影方程为

$$\begin{cases} x+y+z-4=0 \\ y-z-1=0 \end{cases}$$

§2.2 导数与微分

一、基本概念

众所周知，一元函数$y=f(x)$在点 x_0 处的导数为

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

关于多元函数$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在点 $(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$对变元$x_1$的偏导数，是将变元$x_2,x_3,\cdots,x_n$视为常数，$y$为$x_1$的一元函数之导数，即

$$\frac{\partial f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)}{\partial x_1}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_1}f(x_1,x_2^0,\cdots,x_n^0)\big|_{x_1=x_1^0}.$$

(对其它变元的偏导数亦仿此)。

设函数 $y=f(P)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ $(n\geqslant 1)$ 当 $|\Delta P|=|P-P_0|\to 0$时，有

$$\Delta f(P_0)=f(P)-f(P_0)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Delta x_i+o(|\Delta P|)$$

其中$\Delta P=\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$与 ΔP 无关，则称函数 f 在P_0可微，$\mathrm{d}f(P_0)=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\Delta x_i$称为 f 在点 P_0的微分(或全微分)。

微分与导数在分析中处于同等重要的地位。导数表示函数的变化速度，是“以数表性”，微分则是函数改变量的“线

性逼近”，即在局部范围内用线性函数近似函数。

微分与连续都是函数在一点的某领域内的整体性质，而偏导数仅是函数沿坐标轴一个方向上的性质。它们之间有如下的关系。

函数$f(P)$在点P可微必连续，反之不然。

函数$f(P)$在点P可微必有对各变元的偏导数，且此时微分

$$df(P)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i=\nabla f\cdot d\boldsymbol{r}$$

其中$d\boldsymbol{r}=\{dx_1,dx_2,\cdots,dx_n\}$，$dx_i=\Delta x_i$，

$$\nabla f=\text{grad}\,f=\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1},\ \frac{\partial f}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right\}$$

当$n=1$时(即一元函数)可微与可导性等价；当$n\geqslant2$(即多元函数)偏导数连续必可微。

二、高阶导数与高阶微分

对于一元函数$f(x)$，n阶导数

$$f^{(n)}(x)=[f^{(n-1)}(x)]'\quad(n\geqslant1,\ 记f^{(0)}=f)$$

对于二元函数$f(x,y)$，有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

等.当混合偏导数连续时，函数对各变元求导的顺序无关。如

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

关于高阶微分，对一元函数$f(x)$，

$$d^{(n)}f(x)=f^{(n)}(x)dx^n$$

二元函数$f(x,y)$，

$$d^{(n)}f(x,y)=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f(x,y)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}C_n^k\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^k\partial y^{n-k}}dx^k dy^{n-k}$$

一般地，用点函数表示之，可统一写成

$$d^{(n+1)}f(P)=d\left(d^n f(P)\right)\quad(n\geqslant 1)$$

三、微 分 法 则

1. 四则运算

设f、g是x的函数(一元)，u、v是点P的函数（一元或多元)，a、b是常数，$n\geqslant 1$。

线性规则：

$$(af+bg)^{(n)}=af^{(n)}+bg^{(n)}$$

$$d^{(n)}(au+bv)=ad^{(n)}u+bd^{(n)}v$$

乘积规则(Leibniz 莱布尼兹)：

$$(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}g^{(n-k)}$$

$$d^{(n)}(uv)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k d^{(k)}u\,d^{(n-k)}v$$

注意，当n很大时，用此法则计算很繁，往往需寻求更简单的算法。如求$(\sin x\cos x)^{(n)}$时不宜用 Leibniz 公式，可先做积化和差再求 n 阶导数。

商的规则($n=1$)：

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}$$

2. 复合函数微分法

设$y=f(u)$，$u=g(x)$均为一元可微函数，则有复合函数求导公式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

或 $(f(g(x)))'=f'(u)\cdot g'(x)$

推广到一般情况，设$f(u_1,u_2,\cdots,u_m)$可微，而$u_j=u_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ $(i=1,2,\cdots,m)$有对各变元的偏导数，则

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial u_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i},\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

用矩阵表示，为

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1}\\ \frac{\partial f}{\partial x_2}\\ \vdots\\ \frac{\partial f}{\partial x_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_1}\\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial u_1}{\partial x_n} & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial u_1}\\ \frac{\partial f}{\partial u_2}\\ \vdots\\ \frac{\partial f}{\partial u_m}\end{pmatrix}$$

当$m=n=1$时，即为一元复合函数求导公式。

由于

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial u_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}dx_i$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial u_j}du_j$$

所以求微分df时，不论以$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为变元还是以$(u_1,u_2,\cdots,u_m)$为变元，都有同一形式的公式

$$df=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial u_j}du_j$$

3．隐函数求导法

设$z=f(x,y)$是由方程$F(x,y,z)=0$所确定的二元隐函数，则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}$$

注意，在求偏导数F'_x,F'_y,F'_z时，将x、y、z皆当作独立变元即可，（应当申明，我们假定了$F(x,y,z)$满足隐函数存在定理的条件）。

四、解 题 示 例

例 1　设$f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$，其中$\varphi(x,y)$在点$(0,0)$的某邻域内连续，试研究

（1）$\varphi(x,y)$在什么条件下，存在$f'_x(0,0)$与$f'_y(0,0)$？

（2）$\varphi(x,y)$在什么条件下，$f(x,y)$在点$(0,0)$可微？

［分析］　由于$\varphi(x,y)$为抽象函数，$f(x,y)$为分段函数，因此应当由定义出发研究$f(x,y)$在$(0,0)$处的偏导数与可微性。又当$y=0$时，在$x=0$的两侧$f(x,y)$的表达式不同，因此应当由左，右导数来考虑其偏导数的存在性。

［解］　因为

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\varphi(0,0)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = -\varphi(0,0)$$

$$\lim_{\Delta y \to 0^+} \frac{f(0, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \varphi(0,0)$$

$$\lim_{\Delta y \to 0^-} \frac{f(0, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = -\varphi(0,0)$$

由导数的性质可知，仅当 $\varphi(0,0)=0$ 时，才有 $f'_x(0,0)$ 及 $f'_y(0,0)$ 存在，且 $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$。

由于

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0)\\ &= |\Delta x - \Delta y|\varphi(\Delta x, \Delta y)\end{aligned}$$

且

$$\frac{|\Delta x - \Delta y|}{\rho} \leqslant \frac{|\Delta x| + |\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \leqslant 2$$

当 $\varphi(0,0)=0$ 时，

$$\begin{aligned}&\lim_{\rho \to 0}\left|\frac{\Delta f - [f'_x(0,0)\Delta x + f'_y(0,0)\Delta y]}{\rho}\right|\\ &= \lim_{\rho \to 0}\frac{|\Delta x - \Delta y|\varphi(\Delta x, \Delta y)}{\rho}\\ &\leqslant 2\lim_{\rho \to 0}\varphi(\Delta x, \Delta y) = 0\end{aligned}$$

故当 $\varphi(0,0)=0$ 时，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微，且 $\mathrm{d}f=0$。

例 2 研究函数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

的各次可微性。

［解］ 当$x\neq 0$时，$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}=P_1\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$，

$$f''(x)=\left(\frac{4}{x^6}-\frac{6}{x^4}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}=P_2\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$$

假设 $f^{(n)}(x)=P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$（$x\neq 0$，$P_n$是多项式），则

$$f^{(n+1)}(x)=\left[\frac{2}{x^3}P_n\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^2}P_n'\left(\frac{1}{x}\right)\right]e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$$

因此当$x\neq 0$时，对任何n，$f^{(n)}(x)=P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$，其中$P_n$是多项式。

当$x=0$时，

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}}=0$$

假设$f^{(n)}(0)=0$，则

$$f^{(n+1)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{tP_n(t)}{e^{t^2}}=0$$

于是对任何n，$f^{(n)}(0)=0$。

$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内任意次可微。

例 3 设$y=\sin^5 x$，求$y^{(n)}$。

[解] 因为$\sin^5 x=\sin x\left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)^2$

$$=\frac{1}{4}(\sin x-2\sin x\cos 2x+\sin x\cos^2 2x)$$

$$=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x+\frac{1}{4}\sin x\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)$$

$$=\frac{5}{8}\sin x-\frac{5}{16}\sin 3x-\frac{1}{16}\sin 5x$$

所以 $y^{(n)}=\dfrac{5}{8}\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)-\dfrac{5\cdot 3^n}{16}\sin\left(3x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$

$+\dfrac{5^n}{16}\sin\left(5x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$

例 4 设$y=\operatorname{arctg}x$，求$y^{(n)}$。

[解] 对于求反三角函数的高阶导数，往往要利用三角函数之间的关系，如果直接对一阶导数$y'=\dfrac{1}{1+x^2}$继续求导，则很难进行下去，但注意到$x=\operatorname{tg}y$，我们有

$$y'=\frac{1}{1+x^2}=\cos^2 y$$

$$y''=2\cos y(-\sin y)y'=\cos^2 y\sin(2y+\pi)$$

易求出$y'''=2!\cos^3 y\sin\left(3y+\dfrac{3}{2}\pi\right)$。用归纳法不难证明

$$y^{(n)}=(n-1)!\cos^n y\sin\left(ny+\frac{\pi}{2}\cdot n\right)$$

例 5 设$y=\arcsin x$，求$y^{(n)}(0)$。

［解］　由$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$可得

$$y'^2(1-x^2)=1$$

两边对x求导一次得

$$-2xy'^2+2y'y''(1-x^2)=0$$

或　$-xy'+(1-x^2)y''=0$

两边对x求$n-2$次导数，利用莱布尼兹求导公式可得

$$0=-xy^{(n-1)}-(n-2)y^{(n-2)}+(1-x^2)y^{(n)}$$

$$+(n-2)(-2x)y^{(n-1)}+\frac{(n-2)(n-3)}{2}(-2)y^{(n-2)}$$

将$x=0$代入，记$y_0^{(n)}=\left.\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\right|_{x=0}$，　得

$$-(n-2)^2y_0^{(n-2)}+y_0^{(n)}=0$$

于是　$y_0^{(n)}=(n-2)^2y_0^{(n-2)}$

注意到$y_0^{(0)}=0$，$y_0'=1$，则有$k=0,1,2,3,\cdots$,时，

$$y_0^{(2k)}=0,$$

$$y_0^{(2k+1)}=(2k-1)^2y_0^{(2k-1)}=\cdots$$

$$=(2k-1)^2(2k-3)^2\cdots3^21^2$$

$$=[(2k-1)!!]^2$$

例 6　设$F(x+zy^{-1},y+zx^{-1})=0$中，$z=z(x,y)$，F、z均可微，证明

$$xz_x'+yz_y'=z-xy$$

［证法 1］　设

$$x+zy^{-1}=u,\quad y+zx^{-1}=v$$

$F(u,v)=0$，两边对x和y求偏导，并将z看成x与y的函数，可得

$$F'_u(1+y^{-1}z'_x)+F'_v(z'_x x^{-1}-x^{-2}z)=0 \qquad (1)$$

$$F'_u(z'_y y^{-1}-y^{-2}z)+F'_v(1+x^{-1}z'_y)=0 \qquad (2)$$

由（1）（2）得

$$z'_x=\frac{y^{-2}zF'_v-F'_u}{y^{-1}F'_u+x^{-1}F'_v},\quad z'_y=\frac{y^{-2}zF'_u-F'_v}{y^{-1}F'_u+x^{-1}F'_v}$$

则

$$\begin{aligned}xz'_x+yz'_y&=x\frac{x^{-2}zF'_v-F'_u}{y^{-1}F'_u+x^{-1}F'_v}+y\frac{y^{-2}zF'_u-F'_v}{y^{-1}F'_u+x^{-1}F'_v}\\&=\frac{z(x^{-1}F'_v+y^{-1}F'_u)-xF'_u-yF'_v}{y^{-1}F'_u+x^{-1}F'_v}\\&=z-xy\end{aligned}$$

从而等式成立。

〔证法 2〕　记

$$G(x,y,z)=F(x+zy^{-1},\ y+zx^{-1}),$$

则　$$G'_x=F'_1-zx^{-2}F'_2,\quad G'_y=-zy^{-2}F'_1+F'_2$$

$$G'_z=y^{-1}F'_1+x^{-1}F'_2$$

于是

$$z'_x=\frac{zx^{-2}F'_2-F'_1}{y^{-1}F'_1+x^{-1}F'_2},\quad z'_y=\frac{zy^{-2}F'_1-F'_2}{y^{-1}F'_1+x^{-1}F'_2}$$

从而得　$$xz'_x+yz'_y=z-xy$$

〔证法 3〕　将 $F(x+zy^{-1},\ y+zx^{-1})=0$ 求全微分，

$$\begin{aligned}0=\mathrm{d}F&=F'_1\mathrm{d}(x+zy^{-1})+F'_2\mathrm{d}(y+zx^{-1})\\&=F'_1[\mathrm{d}x+y^{-1}\mathrm{d}z-zy^{-2}\mathrm{d}y]\\&\quad+F'_2[\mathrm{d}y+x^{-1}\mathrm{d}z-zx^{-2}\mathrm{d}x]\end{aligned}$$

解出　$$\begin{aligned}\mathrm{d}z=\frac{1}{y^{-1}F'_1+x^{-1}F'_2}&[(zx^{-2}F'_2-F'_1)\mathrm{d}x\\&+(zy^{-2}F'_1-F'_2)\mathrm{d}y]\end{aligned}$$

由此得到 $z'_x=-\dfrac{zx^{-2}F'_2-F'_1}{y^{-1}F'_1+x^{-1}F'_2}$， $z'_y=\dfrac{zy^{-2}F'_1-F'_2}{y^{-1}F'_1+x^{-1}F'_2}$

从而有
$$xz'_x+yz'_y=z-xy$$

例 7 设 $y(x)$ 由方程组 $y=f(x,t)$， $F(x,y,t)=0$ 决定，求 $\dfrac{dy}{dx}$（假定隐函数存在定理条件适合）。

[解法 1] 方程组

$$\begin{cases}F(x,y,t)=0\\ \phi(x,y,t)=f(x,t)-y=0\end{cases}$$

决定一组隐函数 $y(x)$， $t(x)$。

由方程组定义的隐函数求导公式

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial(F,\phi)}{\partial(x,t)}}{\dfrac{\partial(F,\phi)}{\partial(y,t)}}=-\frac{\begin{vmatrix}F_x & \phi_x\\ F_t & \phi_t\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_y & \phi_y\\ F_t & \phi_t\end{vmatrix}}$$

$$=\frac{f_xF_t-f_tF_x}{F_t+f_tF_y}$$

[解法 2] 两个方程对 x 求导数

$$\frac{dy}{dx}=f_x+f_t\frac{dt}{dx}$$

$$F_x+F_y\frac{dy}{dx}+F_t\frac{dt}{dx}=0$$

消去 $\dfrac{dt}{dx}$，解出 $\dfrac{dy}{dx}$ 为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f_xF_t-f_tF_x}{F_t+f_tF_y}$$

［解法 3］ 取全微分

$$\begin{cases}dy = f_x dx + f_t dt \\ F_x dx + F_y dy + F_t dt = 0\end{cases}$$

消去 dt，同样解出$\dfrac{dy}{dx}$。

［解法 4］ 曲面 $F(x,y,t)=0$ 与 $y=f(x,t)$ 在 (x,t,y) 空间中的法向量为

$$\boldsymbol{n}_1=\{F_x, F_t, F_y\},\quad \boldsymbol{n}_2=\{f_x, f_t, -1\}$$

于是

$$\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\{-F_t-f_tF_y, F_x+f_xF_y, f_tF_x-f_xF_t\}$$

是曲线 l 的切向量，l 的方程为

$$x=x,\quad t=t(x),\quad y=y(x)$$

l 的切向量$\tau=\left\{1, \dfrac{dt}{dx}, \dfrac{dy}{dx}\right\}$。因此

$$\lambda\left(1,\frac{dt}{dx},\frac{dy}{dx}\right)=(-F_t-f_tF_y, F_x+f_xF_y, f_tF_x-f_xF_t)$$

$$\begin{cases}\lambda=-F_t-f_tF_y \\ \lambda\dfrac{dt}{dx}=F_x+f_xF_y \\ \lambda\dfrac{dy}{dx}=f_tF_x-f_xF_t\end{cases}$$

解得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f_xF_t-f_tF_x}{F_t+f_tF_y}$$

及
$$\frac{dt}{dx}=\frac{-(F_x+f_xF_y)}{F_t+f_tF_y}$$

最后一个解法是几何方法，反映了分析与几何的联系，

这种解法一般不容易采用。但解法本身却勾通了分析方法与几何方法，有一定的启发作用。

例 8 设 $x=ue^v$，$y=u\sin v$，$z=uv$，求z'_x, z'_y

其中 $u\neq 0$，$\cos v\neq \sin v$。

[解法 1（解方程法）] 因为

$$\begin{cases} z'_u = z'_x x'_u + z'_y y'_u = v \\ z'_v = z'_x x'_v + z'_y y'_v = u \end{cases}$$

所以
$$z'_x = \frac{v y'_v - u y'_u}{x'_u y'_v - x'_v y'_u} = \frac{e^{-v}(v\cos v - \sin v)}{\cos v - \sin v}$$

$$z'_y = \frac{u x'_u - v x'_v}{x'_u y'_v - x'_v y'_u} = \frac{1-v}{\cos v - \sin v}$$

[解法 2（全微分法）]

$$\begin{cases} dz - v\,du - u\,dv = 0 \\ e^v du + ue^v dv = dx \\ \sin v\,du + u\cos v\,dv = dy \end{cases}$$

消去du、dv后得

$$dz = \frac{e^{-v}(v\cos v + \sin v)\,dx + (1-v)\,dy}{\cos v - \sin v}$$

由此得出

$$\begin{cases} z'_x = \dfrac{e^{-v}(v\cos v - \sin v)}{\cos v - \sin v} \\[2ex] z'_y = \dfrac{1-v}{\cos v - \sin v} \end{cases}$$

例 9 证明 $u = x^n f\left(\dfrac{y}{x^2}\right)$满足方程

$$x u'_x + 2y u'_y = nu$$

（假定函数足够次可微）

［分析］ 验证一个函数满足某微分方程的问题是很普遍的。这些问题的求解方法是

（1）先求出方程中出现的所有（偏）导数；

（2）代入方程验算。

但如果碰到函数有特殊构造时，则有可能运用巧妙的方法来避免直接求导。此例即如此。

［证］ 观察到函数 u 满足恒等式

$$u(xt, yt^2)=t^n u(x, y)$$

两边对t求导后再令 $t=1$ 即得

$$xu_x'+2yu_y'=nu$$

注意，此题可以推广到一般情形。

设 $u=u(x,y)$满足

$$u(x\varphi(t), yg(t))=h(t)u(x,y)$$

其中φ, g, h是可微函数且$\varphi(1)=g(1)=1$，则u适合方程

$$\varphi'(1)xu_x+g'(1)yu_y=h'(1)u$$

特别令$\varphi(t)\equiv g(t)\equiv t$，$h(t)=t^n$，得到方程

$$xu_x'+yu_y'=nu$$

例10 设 $u=x+y$，$v=x-y$，$w=xy-z$，其中 $w=w(u,v)$具有连续的二阶偏导数。试变换方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

［分析］ 本题是自变量和因变量都作变量替换的问题，要求将 $z=z(x,y)$所满足的方程变换成$w=w(u,v)$所满足的方程。

［解法1］ 由 $w=xy-z$ 知 $z=xy-w$，视x和y为自变量，u和v为中间变量，则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y-\frac{\partial w}{\partial x}=y-\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x-\frac{\partial w}{\partial y}=x-\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}-\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1-\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}-\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$$

于是得

$$0=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2-4\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}$$

即

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\frac{1}{2}$$

[解法 2]　视 u 和 v 为自变量，x 和 y 为中间变量。由 $w=xy-z$ 及 $u=x+y$，$v=x-y$，可得

$$\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\partial(xy-z)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial(xy-z)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$=\frac{1}{2}\left(y-\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\frac{1}{2}\left[-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{1}{2}+\left(1-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)\frac{1}{2}\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right)\frac{1}{2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{1}{2}\right]$$

$$=-\frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\right]=\frac{1}{2}$$

［解法 3］　由题设，有$\mathrm{d}w = y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y - \mathrm{d}z$及

$$\mathrm{d}w = \frac{\partial w}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial w}{\partial u}\mathrm{d}v = \frac{\partial w}{\partial u}(\mathrm{d}x - \mathrm{d}y) + \frac{\partial w}{\partial v}(\mathrm{d}x - \mathrm{d}y)$$

故得

$$\mathrm{d}z = \left(y - \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v}\right)\mathrm{d}x + \left(x - \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}\right)\mathrm{d}y$$

从而

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y - \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x - \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}$$

记　$$R = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = x + y - 2\frac{\partial w}{\partial u} = u - 2\frac{\partial w}{\partial u}$$

于是

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} \\
&= \frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \\
&= \frac{\partial R}{\partial u}(1+1) + \frac{\partial R}{\partial v}(1-1) = 2\frac{\partial R}{\partial u} \\
&= 2\frac{\partial}{\partial u}\left(u - 2\frac{\partial w}{\partial u}\right) = 2\left(1 - 2\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\right)
\end{aligned}$$

即　$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{1}{2}$$

例11　函数f称为n次齐次函数，若对任意正数t，$f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z)$，试证：$f$是$n$次齐次函数的充分必要条件是

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z = nf$$

[证] 必要性 设 $u=tx$, $v=ty$, $w=tz$, 已知等式两端对t求导得

$$xf'_u+yf'_v+zf'_w=nt^{n-1}f(x,y,z)$$

或 $$txf'_u+tyf'_v+tzf'_w=nt^n f(x,y,z)=nf(tx,ty,tz)$$

即 $$uf'_u+vf'_v+wf'_w=nf(u,v,w)$$

改写成变量x,y,z即为

$$xf'_x+yf'_y+zf'_z=nf(x,y,z)$$

充分性 记$F(t)=f(tx,ty,tz)$

则 $$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=f'_u x+f'_v y+f'_w z$$

$$=\frac{1}{t}[f'_u u+f'_v v+f'_w w]$$

$$=\frac{1}{t}nf(tx,ty,tz)$$

$$=\frac{n}{t}F(t)$$

故 $$F(t)=ct^n$$

即 $$f(tx,ty,tz)=ct^n$$

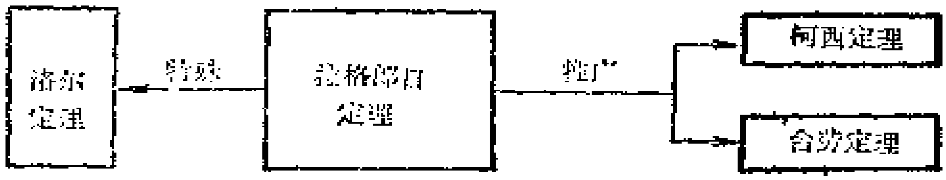
令$t=1$得 $c=f(x,y,z)$, 从而有

$$f(tx,ty,tz)=t^n f(x,y,z)$$

§2.3 微分学基本定理

在一元函数微分学中，应用函数的局部性质(导数)研究函数在区间上的整体性质，就是微分中值定理，包括洛尔(Rolle)定理，拉格朗日(Lagrange)定理，柯西(Cauchy)定理和台劳(Taylor)定理。其中拉格朗日定理是核心，各

定理之间的关系如下表。



一、拉格朗日定理

若$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，则在(a,b)内至少存在一点ξ，使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

由此定理可以导出在积分学中很有用的结论：若$f(x)$在(a,b)内每一点处的导数皆为零，则$f(x)$在该区间内为常数。

应用拉格朗日定理还可以研究以下问题。

（1）判定方程根的存在性；

（2）函数在区间上的性态；

（3）证明不等式；

（4）进行函数估值；

（5）证明重要定理，如洛必达(L'Hospital)法则（它是解决未定型极限的有力工具）。

二、洛尔定理

若$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$f(a)=f(b)$，则在(a,b)内至少存在一点ξ，使得$f'(\xi)=0$。

它是拉格朗日定理的特例，即限定$f(a)=f(b)$。但它可

用于证明拉格朗日定理。

三、柯 西 定 理

利用参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \qquad (a\leqslant t\leqslant b)$$

描述曲线 $y=f(x)$，代入拉格朗日定理，即得

$$\psi(b)-\psi(a)=\frac{\psi'(\xi)}{\varphi'(\xi)}(\varphi(b)-\varphi(a)),\quad (a<\xi<b)$$

将此写为两个函数的关系，便得到柯西定理。

若 $f(x)$，$g(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且 $g'(x)$ 在(a,b)内每一点皆不为零。则在(a,b)内至少存在一点 ξ，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

四、台劳定理(台劳公式)

台劳定理的主要内容是，函数 $f(x)$ 可表示为

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)$$

其中 $P_n(x)$ 是 $(x-x_0)$ 的 n 次多项式

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$R_n(x)$ 是余项，常用的余项形式有

（1） 皮亚诺(Peano)余项：$R_n(x)=0(|x-x_0|^n)$；

（2） 拉格朗日余项：

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$$(0<\theta<1)$$

；

(3) $R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\mathrm{d}t$;

$f(x)$能展开成带皮亚诺余项的台劳公式的条件是$f(x)$在x_0处有n阶导数，公式成立的范围是局部的。$f(x)$能展开成带拉格朗日余项和形如(3)的积分余项的台劳公式的条件是$f(x)$在包含x_0的一个区间内有$n+1$阶连续导数。这时要求条件较强，公式成立已不仅是局部的，而是大范围的了。

台劳公式是拉格朗日定理的推广，当$n=0$时即为拉格朗日公式。

可以说，台劳定理是微分学理论的集中体现。它表明函数可用多项式近似逼近并给出这种近似的误差。台劳定理是借助于高阶导数研究函数性态的桥梁。

台劳定理还可以推广到多元函数。例如对于二元函数，若$f(x,y)$在点$P(x_0,y_0)$的某邻域内$n+1$次可微，则对该邻域内的任一点(x,y)，记$x=x_0+\mathrm{d}x$，$y=y_0+\mathrm{d}y$，有

$$f(x,y)=P_n(x,y)+R_n(x,y)$$

其中

$$P_n(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\mathrm{d}^{(k)}f(x_0,y_0)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}y\right)^k f(x_0,y_0)$$

$$R_n(x,y)=\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{n+1} f(x_0+\theta\mathrm{d}x,$$

$$y+\theta\mathrm{d}y)\qquad 0<\theta<1$$

若在所述邻域内f的每个$n+1$阶偏导数的绝对值都不超过常数M，则

$$|R_n| \leqslant \frac{M}{(n+1)!} 2^{\frac{n+1}{2}} |dx^2 + dy^2|^{\frac{n+1}{2}}$$

注意，若用点函数$f(P)$，不难将台劳定理推广到任意多个变元的函数之情况。

五、洛必达法则

设函数$f(x)$和$F(x)$满足：当$x \to a$时，$f(x) \to 0$，$F(x) \to 0$；在点a的某去心邻域内$f'(x)$和$F'(x)$存在，且$F'(x) \neq 0$；$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{F'(x)}$存在(或为无穷大)，则

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

此为$\dfrac{0}{0}$型未定式。关于$x \to \infty$等各种情况以及$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式，有类似的洛必达法则。而对于$0 \cdot \infty$，$\infty - \infty$，0^0，∞^0，1^∞等未定式，均可利用初等恒等变形，转化为$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$未定式。

六、解题示例

例1　若$a_0 + \dfrac{a_1}{2} + \cdots + \dfrac{a_n}{n+1} = 0$，试判定

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$$

在(0,1)内必有实根。

［解］　此问题实质上是要求判定在(0,1)内某点的函数性质。可考虑用中值定理，注意到

$$\Big(\underbrace{a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}}_{f(x)}\Big)' = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

而在[0,1]上，$f(x)=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 满足洛尔定理条件，知至少存在一点$\xi\in(0,1)$，即 $f'(\xi)=0$，即

$$a_0+a_1\xi+\cdots+a_n\xi^n=0$$

则 $x=\xi$ 为所求实根。

例 2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x-x\ln a}{b^x-x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ $(a>0,\ b>0)$。

[解法 1] 用洛必达法则。

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}[\ln(a^x-x\ln a)-\ln(b^x-x\ln b)]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\left[\frac{(a^x-1)\ln a}{a^x-x\ln a}-\frac{(b^x-1)\ln b}{b^x-x\ln b}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(a^x-1)/x}{a^x-x\ln a}\ln a-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(b^x-1)/x}{b^x-x\ln b}\ln b$$

$$=\frac{1}{2}(\ln^2a-\ln^2b)$$

$$\text{原式}=\exp\left[\frac{1}{2}(\ln^2a-\ln^2b)\right]$$

[解法 2] 用台劳公式。

$$\ln(a^x-x\ln a)-\ln(b^x-x\ln b)$$

$$=\ln\frac{a^x}{b^x}+\ln(1-xa^{-x}\ln a)-\ln(1-xb^{-x}\ln b)$$

$$=x\ln\frac{a}{b}-xa^{-x}\ln a-\frac{1}{2}x^2a^{-2x}\ln^2a+xb^{-x}\ln b$$

$$+\frac{1}{2}x^2b^{-2x}\ln^2b+o(x^2)$$

$$= x\ln\frac{a}{b} - x(1 - x\ln a + o(x))\ln a - \frac{x^2}{2}(1 + o(1))\ln^2 a$$

$$+ x(1 - x\ln a + o(x))\ln b + \frac{x^2}{2}(1 + o(1))\ln^2 b + o(x^2)$$

$$= \frac{x^2}{2}(\ln^2 a - \ln^2 b) + o(x^2)$$

得到与方法1同样的结果。

[解法 3]　用初等变换。

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[1 + \dfrac{a^x - b^x + x\ln b/a}{b^x - x\ln b}\right]}{\dfrac{a^x - b^x + x\ln b/a}{b^x - x\ln b}}$$

$$\times \lim_{x\to 0}\frac{a^x - b^x + x\ln b/a}{x^2(b^x - x\ln b)} = \lim_{x\to 0}\frac{a^x - b^x + x\ln b/a}{x^2}$$

两次用洛必达法则，得

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln^2 a - b^x\ln^2 b}{2} = \frac{1}{2}(\ln^2 a - \ln^2 b)$$

解法3说明，在求极限过程中，即使用微分法计算极限，也要依具体情况结合初等变形和若干中间步骤，而在各步骤中运用不同的方法，效果可能更好。

例 3　试证明：若$f(x)$、$g(x)$都是可微函数，且当$x \geqslant a$时，$|f'(x)| \leqslant g'(x)$，则当$x \geqslant a$时

$$|f(x) - f(a)| \leqslant g(x) - g(a)$$

[证]　令　$\varphi(x) = g(x) - f(x)$　由Lagrange定理知

$$\varphi(x) - \varphi(a) = \varphi'(\xi_1)(x - a),\quad (a < \xi_1 < x)$$

由$x \geqslant a$时，$|f'(x)| \leqslant g'(x)$得

$$-g'(x)\leqslant f'(x)\leqslant g'(x)$$

于是
$$\varphi'(\xi_1)=g'(\xi_1)-f'(\xi_1)\geqslant 0$$

故当 $x\geqslant a$ 时

$$\varphi(x)-\varphi(a)\geqslant 0$$

即
$$g(x)-f(x)-[g(a)-f(a)]\geqslant 0$$

则

$$g(x)-g(a)\geqslant f(x)-f(a),\quad (x\geqslant a) \qquad (1)$$

又令 $\psi(x)=g(x)+f(x)$。由Lagrange中值定理得

$$\psi(x)-\psi(a)=\psi'(\xi_2)(x-a)\quad (a<\xi_2<x)$$

由 $x\geqslant a$ 时，$|f'(x)|\leqslant g'(x)$ 得 $f'(x)+g'(x)\geqslant 0$ 即 $\psi'(\xi_2)\geqslant 0$，故当$x\geqslant a$时，$\psi(x)-\psi(a)\geqslant 0$，即

$$g(x)+f(x)-[g(a)+f(a)]\geqslant 0$$

或
$$g(x)-g(a)\geqslant -[f(x)-f(a)] \qquad (2)$$

由式(1)、(2)得

$$|f(x)-f(a)|\leqslant g(x)-g(a)$$

例 4 证明不等式

$$\frac{a^{\frac{1}{(n+1)}}}{(n+1)^2}<\frac{a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{(n+1)}}}{\ln a}<\frac{a^{\frac{1}{n}}}{n^2},\quad (a>1,\ n\geqslant 1)$$

[证] 这种不等式的特点是不等式之中间部分可写成一函数的增量形式，并考虑辅助函数

$$f(x)=a^{\frac{1}{x}}$$

于是要证的不等式变形为

$$\frac{f(n+1)}{(n+1)^2}\ln a<f(n)-f(n+1)<\frac{f(n)}{n^2}\ln a$$

由中值公式，有

$$f(n)-f(n+1)=-f'(n+\theta)=a^{\frac{1}{n+\theta}}\frac{\ln a}{(n+\theta)^2}\quad (0<\theta<1)$$

于是原不等式变为

$$\frac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^2}<\frac{a^{\frac{1}{n+\theta}}}{(n+\theta)^2}<\frac{a^{\frac{1}{n}}}{n^2}$$

由函数 x^2a^x的单调增加性知，上述不等式成立。

由本题证明可知，欲证一个类似本题所列不等式形式的命题，一是注意下述形式

$$f(n+1)-f(n)$$

或

$$f(x+l)-f(x)$$

与中值定理中函数增量形式相仿，故可试用中值定理进行估值。另一方面是要能根据分析表达式的特点建立辅助函数。抓住这两条，可顺利地进行不等式的证明。

例 5 设函数$f(x)$在 $x=x_0$附近有连续导数，而 $\alpha_n<x_0<\beta_n(n=1,2,3,\cdots)$，当 $n\to\infty$时，$\alpha_n\to x_0$，$\beta_n\to x_0$。证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=f'(x_0)$$

［证］ $f(x)$在$x=x_0$附近满足Lagrange定理条件，故有

$$\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=f'(\xi),\ (\alpha_n<\xi<\beta_n)\qquad (1)$$

当 $n\to\infty$时，$\alpha_n\to x_0$，$\beta_n\to x_0$，此时有$\xi\to x_0$。又$f'(x)$在$x=x_0$点附近连续，所以有

$$\lim_{\xi\to x_0}f'(\xi)=f'(x_0)$$

将(1)式两边取极限得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=\lim_{\xi\to x_0}f'(\xi)=f'(x_0)$$

例 6　设$1\leqslant x<+\infty$时有$0<f'(x)<\frac{1}{x^2}$，且$f'(x)$连续，试证明极限$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$存在。

〔证〕　由$f'(x)>0$知$f(x)$在$[1,+\infty]$上严格单调上升，由$0<f'(x)<\frac{1}{x^2}$及积分性质有

$$\int_1^x 0\mathrm{d}x<\int_1^x f'(x)\mathrm{d}x<\int_1^x \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

即

$$0<f(x)-f(1)<\frac{-1}{x}+1$$

得

$$f(1)<f(x)<f(1)-\frac{1}{x}+1<1+f(1)$$

可见$f(x)$为严格单调上升且有界，故$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在。当$x$为正整数时，$f(x)=f(n)$（整标函数），故$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$存在。

例 7　利用中值定理求下述极限。

$$\lim_{x\to+\infty}x^2[\ln\operatorname{arctg}(x+1)-\ln\operatorname{arctg}x]$$

〔解〕　原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{[1+(x+\theta)^2]\operatorname{arctg}(x+\theta)}$

$$=\frac{2}{\pi},\ (0<\theta<1)$$

例 7 若用洛必达法则则很繁。

例 8　设区间$I=(a,b)$，任给$x\in I$，有$f''(x)=0$，则任给$x\in I$时，有$f(x)=ax+b$。

[分析] 台劳公式是沟通函数及其高阶导数之间的桥梁，是应用高阶导数的局部性研究函数在区间 I 上整体性态的重要工具。在证明一个问题时，如果所涉及到的既有函数又有它的高阶导数，则可试用台劳公式。

[证] 在区间 I 上任取一点 $x_0 \in I$。已知在区间 I 上存在二阶导数，根据台劳公式，任给 $x \in I$，$f(x)$ 在 x_0 展开为台劳公式(到二阶导数)，有

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2.$$

$$(\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

已知 $f''(\xi)=0$，即任给 $x \in I$，有

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \\ &= f'(x_0)x+f(x_0)-f'(x_0)x_0 \end{aligned}$$

设 $f'(x_0)=a$，$b=f(x_0)-f'(x_0)x_0$，有

$$f(x)=ax+b$$

例 9 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上三阶可微，且 $f'''(x)$ 及 $f(x)$ 有界，则 $f'(x)$，$f''(x)$ 也有界。

[证] 由 $f(x)$ 的条件，利用台劳公式展开 $f(x)$ 可得

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{6}f'''(\xi_1) \qquad (1)$$

$$f(x-1)=f(x)+f'(x)(-1)+\frac{1}{2}f''(x)$$

$+\frac{1}{3}f'''(\xi)$

$$+\frac{1}{6}f'''(\xi_2)(-1) \qquad (2)$$

其中 ξ_1，ξ_2 分别在 x 与 $x+1$ 及 x 与 $x-1$ 间。将(1)，(2)两式相加，易得 $f''(x)$ 的有界性，利用两式之差，可得 $f'(x)$

的有界性。

〔注〕 在讨论函数或其导数的性质时，若用台劳展开，我们常需要注意到一些特殊点的展开式，譬如在原点处，利用关于 $x-1$，x，$x+1$ 或 $x-h$，x，$x+h$（h 为任意常数）的展式，或当区间为有限区间 (a,b) 时，常要考虑到 $\frac{a+b}{2}$ 的特殊性，注意到这些，处理问题会变得得心应手。如在该例中，进一步有：若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to\infty} f'''(x)=0$，可以证明 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$，$\lim\limits_{x\to\infty} f''(x)=0$。

例10 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 二次可导，且 $f'(a)=f'(b)=0$，则存在 $c\in(a,b)$ 使得

$$|f''(c)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

〔证〕 注意到台劳展开：

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+f'(a)\left(\frac{a+b}{2}-a\right)+\frac{f''(\xi_1)}{2}\left(\frac{b+a}{2}-a\right)^2$$

及

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+f'(b)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)+\frac{f''(\xi_2)}{2}\left(\frac{b+a}{2}-b\right)^2$$

其中 $\xi_1\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$，$\xi_2\in\left(\frac{a+b}{2},b\right)$

有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+\frac{(b-a)^2}{8}f''(\xi_1)$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+\frac{(b-a)^2}{8}f''(\xi_2)$$

两式相减得

$$|f(b)-f(a)|=\frac{(b-a)^2}{8}|f''(\xi_2)-f''(\xi_1)|$$

$$\leqslant\frac{(b-a)^2}{8}(|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|)$$

若 $|f''(\xi_1)|\geqslant|f''(\xi_2)|$，则取 $c=\xi_1$；若 $|f''(\xi_2)|\geqslant|f''(\xi_1)|$，则取 $c=\xi_2$，总有

$$|f''(c)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

例 11 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 二次可导，且 $M_i=\max\limits_{x\in(-\infty,+\infty)}|f^{(i)}(x)|<\infty$，$(i=0,1,2)$，证明 $M_1^2\leqslant 2M_0M_2$。

〔证〕 对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ 及 $h>0$

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(\xi_1)}{2}h^2$$

$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{f''(\xi_2)}{2}h^2$$

其中 ξ_1，ξ_2 分别是介于 x 与 $x+h$ 及 x 与 $x-h$ 间的实数。将两式相减可得

$$f(x+h)-f(x-h)=2hf'(x)+\frac{h^2}{2}(f''(\xi_1)-f''(\xi_2))$$

或移项取绝对值得

$$2h|f'(x)|\leqslant 2|hf'(x)|\leqslant|f(x+h)|+|f(x-h)|$$

$$-\frac{1}{2}(|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|)h^2$$

注意到 M_i 的定义，有

$$2h|f'(x)|\leqslant 2M_0+\frac{1}{2}\cdot 2M_2h^2$$

$$=2M_0+M_2h^2$$

由 x 的任意性知

$$2hM_1\leqslant 2M_0+M_2h^2$$

或 $$M_2h^2-2M_1h+2M_0\geqslant 0$$

从而 $$\Delta=4M_1^2-8M_0M_2\leqslant 0$$

即 $$M_1^2\leqslant 2M_0M_2$$

例12 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微且 $f(a)=0$，若存在常数 k 使得 $|f'(x)|\leqslant k|f(x)|$，则 $f(x)\equiv 0$。

[证法 1] 若 $k=0$，结论显然成立。

若 $k>0$，取 $\delta=\dfrac{1}{2k}$，将 $[a,b]$ 区间进行分割 $[a,a+\delta]$，$[a+\delta,a+2\delta]\cdots\cdots[a+m\delta,b]$ 直到最后一个区间的长度不足 δ。对 $x\in[a,a+\delta]$ 有

$$f(x)=f(a)+f'(\xi)(x-a)=f'(\xi)(x-a)$$

故 $$|f(x)|=|f'(\xi)|\cdot|x-a|\leqslant|f'(\xi)|\delta\leqslant k|f(\xi)|\delta$$

$$=\frac{1}{2}|f(\xi)|\leqslant\frac{M}{2}$$

其中 $$M=\max_{x\in[a,a+\delta]}|f(x)|$$

由 x 的任意性，知 $M\leqslant\dfrac{M}{2}$，从而 $M=0$。于是 $f(x)\equiv 0$，$x\in[a,a+\delta]$。

同样延拓到 $[a+\delta,a+2\delta]\cdots\cdots$ 直到 $[a+m\delta,b]$ 可以证明 $f(x)\equiv 0$。

[证法 2] 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，故有界，即存在正实数 M，使得 $|f(x)|\leqslant M$，利用恒等式

$$f(x)=\int_a^x f'(x)\mathrm{d}x \text{ 有}$$

$$|f(x)|\leqslant\int_a^x|f'(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_a^x k|f(x)|\mathrm{d}x$$
$$\leqslant kM(x-a)$$

再代入 $$|f(x)|\leqslant k\int_a^x|f(x)|\mathrm{d}x$$

得 $$|f(x)|\leqslant k^2M\cdot\frac{(x-a)^2}{2}$$

如此迭代下去可得

$$|f(x)|\leqslant\frac{MA^n}{n!}(x-a)^n$$

上式右端当 $n\to\infty$ 时极限为0，由 x 的任意性知 $f(x)=0$，$x\in[a,b]$。

§2.4 微分学应用

一、几何应用

1. 平面曲线 $y=y(x)$ 在点 (x_0,y_0) 的切线方程

$$y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$$

法线方程

$$y-y_0=-\frac{1}{y'(x_0)}(x-x_0)$$

曲率

$$K=\left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}\bigg|_{(x_0,y_0)}$$

2. 空间曲线

$$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)\\z=z(t)\end{cases}$$

在点$M(x_0,y_0,z_0)$（对应于$t=t_0$）的切线方程

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}$$

法平面方程

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$$

3. 曲面$F(x,y,z)=0$在点$M(x_0,y_0,z_0)$的切平面方程

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)$$
$$+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

法线方程

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}$$

对于上述几个方程，如果注意到空间曲线的切向量为$\{x'(t),y'(t),z'(t)\}$，曲面的法向量为$\{F'_x,F'_y,F'_z\}$，均可立即得到。对于空间曲线的一般方程

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$$

与曲面的参数方程

$$\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\\z=z(u,v)\end{cases}$$

可利用隐函数求导法，求出曲线的切向量及曲面的法向量，从而导出各种方程。

二、函数的增减性、凹凸性与拐点

可导函数$f(x)$在(a,b)内单调增加（或减少）的充要条件

是$f'(x)\geqslant 0$(或$f'(x)\leqslant 0$)。

设$f(x)$在(a,b)有定义，若对(a,b)中任何x_1,x_2，恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>(\text{或}<)\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

则称$f(x)$在(a,b)上是凸(或凹)的；如果在(a,b)内，$f''(x)<0$(或>0)，则$f(x)$在(a,b)上为凸(或凹)的。

曲线$y=f(x)$凸弧与凹弧的分界点称为拐点。若在点x_0处，$f''(x_0)=0$或不存在，且$f''(x)$在x_0之左右反号，则$(x_0,f(x_0))$为曲线$y=f(x)$的拐点。

三、函数的极值

极值是一元函数与多元函数所共有的性质，现在给出统一定义：设点函数$f(P)$，若对于点P_0的某邻域内的P，恒有$f(P)<f(P_0)$，则称$f(P_0)$为极大值；若恒有$f(P)>f(P_0)$，则称$f(P_0)$为极小值。

1. 一元函数$y=f(x)$的极值求法

第一步　求导数$f'(x)$并解方程$f'(x)=0$得驻点$x=x_0$。或求出$f'(x)$不存在之点x，也记为x_0。

第二步　判别x_0是否极值点。

方法1：

若

x	x_0	
$f'(x)$	$+$	$-$

，则$f(x_0)$是极大值(x_0是极大点)。

若

x	x_0	
$f'(x)$	$-$	$+$

，则$f(x_0)$是极小值(x_0是极小点)。

方法2：设 $f''(x_0)$ 存在，

（1）若 $f''(x_0)>0$，则 $f(x_0)$ 是极小值；

（2）若 $f''(x_0)<0$，则 $f(x_0)$ 是极大值。

注意，若 $f''(x_0)=0$，$f(x_0)$ 是否极值不能确定，利用台劳公式，可得到下述更精确的判别法。

方法3：若 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$，而 $f^{(n)}(x_0)\neq 0$。则

当 n 为奇数时，$f(x_0)$ 不是极值；

当 n 为偶数时，$f(x_0)$ 是极值：且 $f^{(n)}(x_0)>0$，$f(x_0)$ 是极小值；$f^{(n)}(x_0)<0$，$f(x_0)$ 是极大值。

2．　二元函数 $z=f(x,y)$ 的极值求法

第一步　求偏导数 f'_x，f'_y。解方程组

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases}$$

得驻点 (x_0, y_0)。

第二步（判别）　求二阶偏导数 $f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy}$，并计算值

$A=f''_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$

（1）若 $B^2-AC<0$，当 $A>0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 为极小值；当 $A<0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 为极大值；

（2）若 $B^2-AC>0$，$f(x_0,y_0)$ 不为极值；

注意：（1）若 $B^2-AC=0$，$f(x_0,y_0)$ 是否极值不能确定。（2）记 $AC-B^2=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$，$AC-B^2$ 的符号即为行列式的符号。因此极值的判定亦可用线性代数中矩阵的正定性来描述。我们将于下面给出。

3．　多元函数 $z=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的极值求法

第一步　求所有一阶偏导数，并解方程组

$$\begin{cases} f'_{x_1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \\ f'_{x_2}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f'_{x_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \end{cases}$$

得驻点 $(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$。

第二步(判别)　计算所有二阶偏导数，记

$$H(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

求出 $H_0=H(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$，则（1）当 H_0 为正定矩阵时，$f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 为极小值；（2）当 H_0 为负定矩阵时，$f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 为极大值；（3）当 H_0 为不定时，$f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 不取极值。

特别地，当 $n=2$ 时，记 $x_1=x, x_2=y, x_1^0=x_0, x_2^0=y_0$，

$$H_0=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}_{(x_0,y_0)}=\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

$$|H_0|=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$$

当主子式 $A>0$，$AC-B^2=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}>0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 为极

小值；当$A<0$，$AC-B^2=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}>0$时，$f(x_0,y_0)$为极大值。这与二元函数的讨论是一致的。

我们指出，极值是函数的局部性质，而函数的最值是整体性质。可以用极值或比较函数在各驻点与端点的值来求出函数在一个区间上的最值。函数的最值在实际问题中很有用，而且驻点往往是唯一的，这时只需由实际意义来判定而不必用充分条件判别。

4．条件极值

求函数$z=f(x,y)$在条件$\varphi(x,y)=0$下的极值。方法如下：引进辅助函数

$$F(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$$

解方程组

$$\begin{cases} F'_x(x,y)=f'_x+\lambda\varphi'_x=0 \\ F'_y(x,y)=f'_y+\lambda\varphi'_y=0 \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}$$

得解(x_0,y_0,λ_0)。这时(x_0,y_0)为取得条件极值的可疑点。再判别：记

$$A=F''_{xx}(x_0,y_0,\lambda_0),\quad B=F''_{xy}(x_0,y_0,\lambda_0),$$
$$C=F''_{yy}(x_0,y_0,\lambda_0)$$

若$AC-B^2>0$，且$A>0$，则$f(x_0,y_0)$为条件极小值；$A<0$，则$f(x_0,y_0)$为条件极大值。

对于变元更多的情况，如三元函数$u=f(x,y,z)$在条件$\varphi_1(x,y,z)=0$与$\varphi_2(x,y,z)=0$下的极值，引进

$$F(x,y,z)=f(x,y,z)+\lambda\varphi_1(x,y,z)+\mu\varphi_2(x,y,z)$$

同上求出可疑点$P_0=(x_0,y_0,z_0,\lambda_0,\mu_0)$。判定方法为：若

$d^2F|_{(x_0,y_0,z_0,\lambda_0,\mu_0)}>0$（或$<0$），则$f(x_0,y_0,z_0)$为极小（或大）值。

四、解题示例

例 1 判断 $x=0$ 是否是函数

$$f(x)=x^{10}+x^5+ax^4+b,\quad (a,b\text{ 为常数})$$

的极值点。

［解］ $$f'(x)=10x^9+5x^4+4ax^3$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=0$ 是驻点。又有

$$f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0$$

而 $f^{(4)}(0)=24a$。

当 $a\neq0$ 时，$x=0$ 为极值点，且 $a>0$ 时为极小点；$a<0$ 时为极大点。

当 $a=0$ 时，$f^{(4)}(0)=0$，而 $f^{(5)}=5!\neq0$，故 $x=0$ 不为极值点。

例 2 试判定下列命题是否正确，如果你认为不正确，试举出反例。

（1）若 $f'(x_0)=0$，则 x_0 必为 $f(x)$ 的极值点；

（2）若 x_0 为 $f(x)$ 的极值点，则必有 $f'(x_0)=0$；

（3）$f(x)$ 在 (a,b) 内的极大值必大于其极小值；

（4）若 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点，则必存在 x_0 的某邻域，在此邻域内，函数 $f(x)$ 在 x_0 的左侧单调上升，而在 x_0 的右侧单调下降。

［解］ 题（1）强调驻点不一定是极值点，题（2）表明当 $y=f(x)$ 在 x_0 点可导时，$f'(x_0)=0$ 是取极值的必要条件。这也表明，欲求极值，除了要求出驻点外，还要求出导数不

存在的点。

题（3）表明极值是函数在某点邻域内的局部性质，不是函数在某区间上的整体性质。

以上三个命题错误较明显，反例也易给出。

我们讨论题（4）。题（4）的目的是更进一步地明了极值的概念：若 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，且对于这个邻域内异于 x_0 的任何 x，总有 $f(x_0)>f(x)$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的极大点。但是，这绝不能凭空想象，认为函数在极大点左侧必单调增加，在极大值右侧必单调减少。下面给出一个反例。

设

$$f(x)=\begin{cases}2-x^2\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$$

不难看出，当 $x\neq 0$ 时，

$$f(x)-f(0)=-x^2\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)<0$$

即 $x=0$ 为 $f(x)$ 的极大点。

当 $x\neq 0$ 时，

$$f'(x)=-2x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)+\cos\frac{1}{x}$$

当 x 足够接近零时，$2x\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right)$ 也足够接近零，而 $\cos\dfrac{1}{x}$ 却在 -1 与 $+1$ 之间振荡，因而 $f(x)$ 在 $x=0$ 的两侧都不是单调的。

例 3 已知 $a>0$，试证

$$f(x)=\frac{1}{1+|x|}+\frac{1}{1+|x-a|}$$

的最大值为$\frac{2+a}{1+a}$.

〔分析〕 欲寻找$f(x)$在给定区间上的最值，可以判定在给定区间上函数的增减性与极值。但是，函数$f(x)$的表达式中含有绝对值符号，通常的方法是先化掉绝对值符号，再利用导数来判定函数 $f(x)$ 的增减性。

〔证〕

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+a-x}, & x<0\\ \dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+a-x}, & 0\leqslant x<a\\ \dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+x-a}, & x>a\end{cases}$$

分段点 $x=0$，$x=a$ 将 $(-\infty,+\infty)$ 分为三个子区间：$(-\infty,0)$，$(0,a)$，$(a,+\infty)$。且知

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-x)^2}+\dfrac{1}{(1+a-x)^2}, & x<0\\ -\dfrac{1}{(1+x)^2}+\dfrac{1}{(1+a-x)^2}, & 0<x<a\\ \dfrac{-1}{(1+x)^2}-\dfrac{1}{(1+x-a)^2}, & x>a\end{cases}$$

在$(-\infty,0)$内，$f'(x)>0$ 单增。由于 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上连续。$f(0)=1+\frac{1}{1+a}=\frac{2+a}{1+a}$为 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上的最大值。

在$(a,+\infty)$内，$f'(x)<0$，单减。由于$f(x)$在$[a,+\infty)$内连续，因此$f(a)=\frac{2+a}{1+a}$在$f(x)$在$[a,+\infty)$内的最大值。

在$(0,a)$内，$f(x)$有唯一驻点$x=\frac{a}{2}$，且

$$f'\left(\frac{a}{2}+0\right)<0,\quad f'\left(\frac{a}{2}-0\right)>0$$

故知 $f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{4}{2+a}$为$f(x)$的极大值。又

$$\frac{4}{2+a}-\frac{2+a}{1+a}<0$$

可知$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内的最大值为$\frac{2+a}{1+a}$。

例 4 求曲面$x=ue^v$，$y=ve^u$，$z=u+v$在$u=v=0$处的切平面。

[解] $z=z(u,v)$。而$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$。可由方程组确定。当$u=v=0$时，$x=y=0$。问题可转化为求$z=z(x,y)$的过点$(x,y)=(0,0)$的切平面方程

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}(x-0)+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}(y-0)=0$$

由于

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}$$

其中$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial v}{\partial y}$可由$u$、$v$的隐式方程组

$$x=ue^v,\quad y=ve^u$$

分别对 x 和 y 求偏导而得：

$$\begin{cases} 1 = \mathrm{e}^v \dfrac{\partial u}{\partial x} + u\mathrm{e}^v \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ 0 = v\mathrm{e}^u \dfrac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{e}^u \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = \mathrm{e}^v \dfrac{\partial v}{\partial y} + u\mathrm{e}^v \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ 1 = v\mathrm{e}^u \dfrac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{e}^u \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

解得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\mathrm{e}^u(1-uv)}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v}{\mathrm{e}^{u+v}(1-uv)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-u}{\mathrm{e}^v(1-uv)}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\mathrm{e}^u(1-uv)}$$

因此

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)} = 1, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)} = 1$$

故切平面方程为

$$z = x + y$$

例 5　试求函数 $z = (1+\mathrm{e}^y)\cos x - y\mathrm{e}^y$ 的极值与极值点，并指出是极大点还是极小点。

［解］　由于

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -(1+\mathrm{e}^y)\sin x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = (\cos x - 1 - y)\mathrm{e}^y$$

令 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$，$\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$，求得驻点

$$x = 2n\pi\ (n\ \text{为整数}),\quad y = 0$$

或

$$x=(2n+1)\pi\ (n\text{为整数}),\quad y=-2$$

又由于

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-(1+e^y)\cos x,\quad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^y\sin x$$

$$C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(\cos x-2-y)e^y$$

当$x=2n\pi$（n为整数），$y=0$时，$A=-2<0$，而

$$AC-B^2=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=2>0$$

故点$(2n\pi,0)$为极大点，极大值为2。

当$x=(2n+1)\pi$，$y=-2$时，

$$AC-B^2=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}<0$$

点$((2n+1)\pi,-2)$不是给定函数的极值点。

综上所述，原问题有无数多个极大点，但无极小点。这是与一元函数不同的地方。

例 6 在旋转椭球面$2x^2+y^2+z^2=1$上，求距离平面$2x+y-z=6$的最近点、最远点、最近距离和最远距离。

［解］ 设(x,y,z)为旋转曲面上动点，必定满足$2x^2+y^2+z^2=1$，该点到平面$2x+y-z=6$间的距离$d=\frac{1}{\sqrt{6}}|2x+y-z-6|$，故知原问题为条件极值问题。

由于d的表达式中含有绝对值符号，可以考虑以下等价问题：寻求在条件$2x^2+y^2+z^2=1$之下$(2x+y-z-6)^2$的极值。

建立拉格朗日函数

$$F(x,y,z,\lambda)=(2x+y-z-6)^2+\lambda(2x^2+y^2+z^2-1)$$

求得驻点 $x=\pm\frac{1}{2}$, $y=\pm\frac{1}{2}$, $z=\mp\frac{1}{2}$,此时相应的

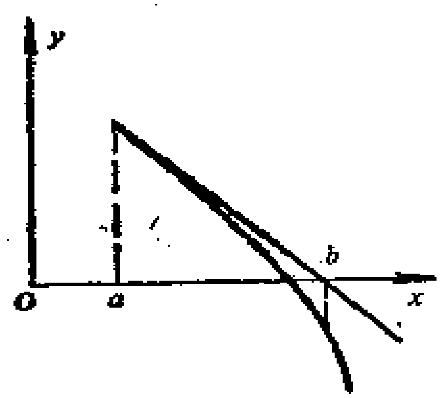
$$d_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\left|2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)-6\right|=\frac{2}{3}\sqrt{6}$$

$$d_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\left|2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}-6\right|=\frac{4}{3}\sqrt{6}$$

由于驻点只有两个，且最近点与最远点都存在。故得最远点 $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$;最远距离为$\frac{4}{3}\sqrt{6}$，最近点$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$;最近距离为$\frac{2}{3}\sqrt{6}$。

本题表明，多元函数极值的运算可以借鉴一元函数极值的运算技巧。

例 7 设函数 $f(x)$于$[a,+\infty)$内二次可微,$f''(x)\leqslant 0$,又$f(a)>0$, $f'(a)<0$, 证明 $f(x)=0$在$(a,+\infty)$内存在唯一的实根。



[证] 因 $f''(x)\leqslant 0$, 故 $f'(x)\leqslant f'(a)<0$,从而$f(x)$严格单调减少，于是$f(x)=0$至多只有一个根。

以下证存在性(即$f(x)=0$确有实根).作$y=f(x)$的草图如右：由条件知，$y=f(x)$递减且为凸弧，曲线必在切线 $y=f(a)+f'(a)(x-a)$之下。

作辅助函数

$$F(x)=f(x)-[f(a)+f'(a)(x-a)]$$

令 $f(a)+f'(a)(x-a)=0$，得 $x=a-\frac{f(a)}{f'(a)}=b>a$。于是 $f(b)=F(b)<F(a)=0$，而 $f(a)>0$。对函数 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 应用连续函数零值定理，有 $\xi\in(a,b)\subset(a,+\infty)$，使 $f(\xi)=0$。

例 8 两个正实数的和为常数 a，求此两正数各自的 m 次幂与 n 次幂 $(m,n>0)$ 相乘积的极大值。

［解］ 设两正数 x，y 且 $x+y=a$，欲求 $x^m y^n$ 的极大值。利用Lagrange 乘数法。令

$$F(x,y,\lambda)=x^m y^n+\lambda(x+y-a)$$

由 $F'_x=0$，$F'_y=0$，$F'_\lambda=0$ 得

$$\begin{cases} mx^{m-1}y^n+\lambda=0 \\ nx^m y^{n-1}+\lambda=0 \\ x+y=a \end{cases}$$

得解为 $x=\frac{ma}{m+n}$， $y=\frac{na}{m+n}$。由于解唯一，且存在极大值，故该点即为极大点，

$$(x^m y^n)_{极大}=\frac{m^m\cdot n^n\cdot a^{m+n}}{(m+n)^{m+n}}$$

例 9 若直角三角形的一直角边与斜边之和为常数，求有最大面积的直角三角形。

［解］ 这是一条件极值问题，设直角三角形的一直角边为 a，斜边为 c，则 $a+c=m$（常数）另一直角边为 $b=\sqrt{c^2-a^2}$，故三角形面积为

$$S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}a\cdot\sqrt{c^2-a^2}$$

用 Lagrange 乘数法，设$F(a,c,\lambda)=\frac{1}{2}a\sqrt{c^2-a^2}-\lambda(a+c-m)$令 $F'_a=0$，$F'_c=0$，$F'_\lambda=0$ 得

$$\begin{cases}c^2-2a^2-2\sqrt{c^2-a^2}\lambda=0\\ac-2\sqrt{c^2-a^2}\lambda=0\\a+c=m\end{cases}$$

解得 $a=\frac{m}{3}$，$c=\frac{2}{3}m$，从而 $b=\frac{\sqrt{3}}{3}m$。此为唯一解，由于题给情况最大面积的直角三角形总存在，故上述解即为使直角三角形面积取最大，容易看出该三角形三个内角分别为$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{2}$。

自我测试题(一)

1．证明：若函数$f(x)$在(a,b)可导，在b连续，任给$x\in(a,b)$，$f'(x)\geqslant0$，则对任给$x\in(a,b)$有 $f(x)\leqslant f(b)$。

2．证明：若函数$f(x)$在$[a,b]$ $(a>0)$可导，则至少存在一点$c\in(a,b)$使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f'(c)}{2c}$$

3．任给$x\in(a,b)$，$f''(x)\geqslant0$则函数$f(x)$在(a,b)上是凹的，即任给$x,x_0\in(a,b)$有

$$f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

4．计算 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$。

5. 研究函数

$$f(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$$

(n为自然数)的极值。

6. 在一个三角形内，三个内角取何值时其正弦的乘积取得最大值。

7. 若导函数$f'(x)$在$(0,+\infty)$严格增加，且$f(0)=0$，则函数$f(x)/x$在$(0,+\infty)$严格增加。

8. 证明：若函数$f(x)$与$g(x)$在(a,b)可导，且对于任给$x\in(a,b)$，$g(x)\neq 0$，

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}=0$$

则存在常数c，使得$f(x)=cg(x)$

9. 设$y=(\arcsin x)^2$，证明

(1) $(1-x^2)y''-xy'=2$

(2) $(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0$ $(n\geq 1)$

(3) $y^{(n+2)}(0)=n^2y^{(n)}(0)$

并求$y^{(n)}(0)$之值。

10. 证明 $$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$$

11. 证明 Legendre 多项式 $P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$

满足方程

$$(x^2-1)P_n''+2xP_n'-n(n+1)P_n=0$$

12. 设 $y=e^{\sqrt{x}}$，求证

(1) $4xy''+2y'-y=0$

(2) $4xy^{(n+1)}+(4n-2)y^{(n)}-y^{(n-1)}=0$

13. 设$f''(1)=0$，$f'(1)=1$。求证在点$x=1$处，

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x^2)=\frac{d^2}{dx^2}f^2(x)$$

提示与答案

1. 提示：由拉格朗日定理判别$f(b)-f(x)$的符号。

2. 提示：由柯西定理证明。

3. 将$f(x)$台劳展开于x_0点即得。

4. $e^{-2/x}$。

5. $x=0$为驻点。当n为偶数时$f'(x)\leqslant 0$（$-\infty<x<\infty$），不存在极限点；当n为奇数时，若$x<0$有$f'(x)>0$，若$x>0$，有$f'(x)<0$，$f(x)$在$x=0$处有极大值1。

6. 三顶角均为$\frac{\pi}{3}$时，正弦乘积最大。

7. 证明$(f(x)/x)'>0$即可。

8. 讨论$(f(x)/g(x))'$。

9. (1) 直接计算；(2) 由高阶求导公式对(1)两端求n次导数；(3) 在(2)中令$x=0$；(4) 由(3)式递推。

10. 可用归纳法证明，对n进行归纳。

11. 可以直接证明。

12. (1) 可直接计算 (2) 在(1)中两端求n次导数利用高阶导数乘积的求导法则。

13. 分别求出两端导数值加以比较。

自我测试题(二)

1. 讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases} y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & 当x^2+y^2\neq 0 时 \\ 0, & 当x^2+y^2=0 时 \end{cases}$$

偏导数的存在性。

2. 求曲线

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

在点$M(1,-2,1)$处的切线及法平面方程。

3. 设函数$u=f(r)$满足方程

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

求$f(r)$的表达式，其中$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。

4. 函数$z=z(x,y)$由方程$x^2+y^2+z^2=yf\left(\dfrac{z}{y}\right)$给出，其中$f$可微，求证

$$(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz$$

5. 将函数$f(x,y)=x^2+xy+y^2+3x-2y+4$在点$(-1,1)$按台劳公式表示。

6. 设Ω为xoy平面上一个有界闭区域，$u=u(x,y)$在Ω上连续，在Ω内有偏导数，而u在Ω之边界上取零值，在Ω内部满足$\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=u$

（1） 求出一个满足这些条件的u；

（2） 这样的u是否唯一？

7． 设曲线L的方程是$\varphi(x,y)=0$，φ有一阶连续偏导数，P是曲线外一点，PQ是P到曲线的最短距离（Q在L上），求证PQ就是曲线L的法线。

8． 在平面上求一点，使它到几个定点(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，$\cdots$，(x_n,y_n)的距离之平方和最小。

9． 设$f(x)$在$[0,1]$上二次连续可导，则对任意的$\xi\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$，$\eta\in\left(\frac{2}{3},1\right)$有

$$|f'(x)|\leqslant 3|f(\xi)-f(\eta)|+\int_0^1|f''(x)|\mathrm{d}x$$

提 示 与 答 案

1． $f'_x(0,0)=0$，$f'_y(0,0)$不存在。

2． 切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-1}$$

法平面方程为

$$x-z=0$$

3． $f(r)=-\frac{c_1}{r}+c_2$

4． 直接求导证明。

5． $f(x,y)=2(x+1)-(y-1)+(x+1)^2$
$+(x+1)(y-1)+(y-1)^2$

6． $u\equiv0$，解唯一。

7. 提示：只须证PQ垂直于L在点Q处的切线.

8. 此点为$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k,\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k\right)$.

9. 提示：存在$\theta\in(0,1)$使得

$$f(\xi)-f(\eta)=f'(\theta)(\xi-\eta)$$

因为$3(\eta-\xi)\geqslant 1$ 可得

$$|f'(x)-f'(\theta)|=\left|\int_x^{\theta}f''(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^1|f''(x)|\mathrm{d}x$$

从而
$$|f'(x)|\leqslant|f'(\theta)|+\int_0^1|f''(x)|\mathrm{d}x$$
$$\leqslant 3|f(\xi)-f(\theta)|+\int_0^1|f''(x)|\mathrm{d}x$$

第三章　积　分　学

积分学是高等数学的又一重要内容。由于它的产生和发展，使得很多问题得到圆满的解决。本章积分学包括不定积分，定积分，重积分，曲线、曲面积分，广义积分场论等。不定积分是求函数的原函数，是微分的逆运算，又是计算其它积分的基础。而定积分、重积分、线面积分中的每一种都是某种和式的极限。我们在此给出这些积分(和式极限)的统一定义。

设Ω为一几何形体，$f(M)$是定义在Ω上的有界函数。将Ω任意分成n个小块$\Delta\Omega_1,\Delta\Omega_2,\cdots,\Delta\Omega_n$，$\Delta\Omega_i(i=1,2,\cdots,n)$表示第$i$个小块，也表示小块的几何度量，在每个小块$\Delta\Omega_i$上任取一点$M_i$，其对应的函数值为$f(M_i)$，作和式$\sum\limits_{i=1}^{n}f(M_i)\cdot\Delta\Omega_i$，若当各小块的直径之最大值$\lambda$趋于零时，极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(M_i)\Delta\Omega_i$$

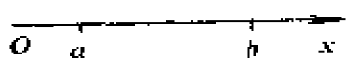
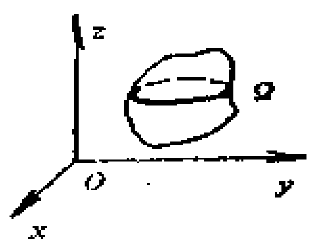
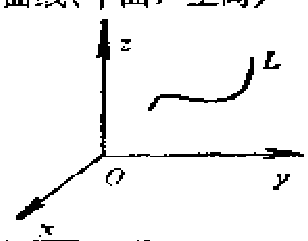
存在，则称此极限值为函数$f(M)$在几何形体Ω上的黎曼(Riemann)积分，记作$\int_\Omega f(M)\mathrm{d}\Omega$，即

$$\int_\Omega f(M)\mathrm{d}\Omega=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(M_i)\Delta\Omega_i$$

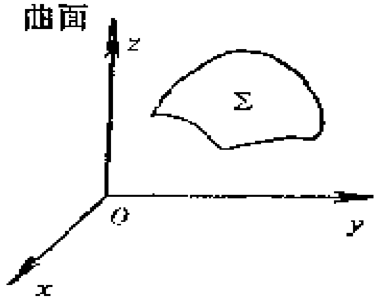
注意，当积分为对坐标的曲线、曲面积分时，$f(M)$与

$d\Omega$ 均为向量，乘为两向量点乘。

现将七种积分归纳如下。

类　型	域（几何形体）	函　　数	积分表示形式
定积分	线　段 	$f(x)$	$\int_a^b f(x)dx$
二重积分	平面域 	$f(M)=f(x,y)$	$\iint_D f(x,y)d\sigma$
三重积分	空间域 	$f(M)=f(x,y,z)$	$\iiint_\Omega f(x,y,z)dV$
曲线积分 (弧长 坐标)	曲线(平面，空间) 	$f(M)$ $f(M)$	$\int_L f(M)ds$ $\int_L f(M)\cdot ds$

续表

类　型	域(几何形体)	函　　数	积分表示形式
曲面积分 $\left(\begin{matrix}面积\\坐标\end{matrix}\right)$	曲面 	$f(M)$ $\boldsymbol{f}(M)$	$\iint\limits_{\Sigma} f(M)\mathrm{d}s$ $\iint\limits_{\Sigma} \boldsymbol{f}(M)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$

§3.1　不　定　积　分

一、不定积分概念与性质

定义　设定义在区间I的函数$f(x)$与$F(x)$恒满足$F'(x)=f(x)$或$\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$，则称$F(x)$是$f(x)$的原函数。函数$f(x)$的全体原函数称为$f(x)$的不定积分，记作

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+c$$

性质：

（1）$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=f(x)$ 或 $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)\mathrm{d}x$

$$\int F'(x)\mathrm{d}x=F(x)+c \text{ 或} \int \mathrm{d}F(x)=F(x)+c$$

（2）$\int\left[af(x)+bg(x)\right]\mathrm{d}x=a\int f(x)\mathrm{d}x+b\int g(x)\mathrm{d}x$

（3）若$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+c$，则$\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+c$，

其中$u=\varphi(x)$是可微函数。这一性质扩大了基本积分公式的

应用。

二、基本积分法

计算不定积分不象微分法有一定的程序可循，它比较困难，往往需要较高的技巧。但只要牢记积分是微分的逆运算，灵活及综合应用以下几种基本积分法，多练多思考分析，归纳总结，掌握一些规律，便可提高计算不定积分的能力。

1. $\int f(x)\,dx \xrightarrow{\text{基本积分公式}} F(x)+c$

2. $\underset{(\text{未知})}{\int f(x)\,dx} \xrightarrow{\text{恒等变换}} \int g(x)\,dx$ （已知）

3. $\underset{(\text{未知})}{\int f(x)\,dx} \xrightarrow[\text{令}u=u(x),\ du=u'(x)dx]{\text{第一类换元法}} \underset{(\text{已知})}{\int g(u)\,du} = G(u)+c$

$= G[u(x)]+c$

4. $\underset{(\text{未知})}{\int f(x)\,dx} \xrightarrow[\text{令}x=\varphi(t),\ dx=\varphi'(t)dt]{\text{第二类换元法}} \underset{(\text{已知})}{\int g(t)\,dt} = G(t)+c$

$= G[\varphi^{-1}(x)]+c$

5. $\underset{(\text{未知})}{\int f(x)\,dx} \xrightarrow[f(x)dx=u\,dv]{\text{分部积分法}} uv - \underset{(\text{已知})}{\int v\,du}$

三、三类特殊初等函数的积分法

1. 有理函数的积分法

有理函数的积分，可归结为多项式与真分式的积分，而真分式$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$可分解为部分分式。

若 $Q(x)=a_0(x-a)^{\alpha}\cdots(x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\lambda}\cdots$
$\cdot(x^2+rx+s)^{\mu}$

则
$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}}+\cdots$$
$$+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\cdots+\frac{B_{\beta}}{(x-b)^{\beta}}$$
$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots$$
$$+\frac{M_{\lambda}x+N_{\lambda}}{(x^2+px+q)^{\lambda}}+\cdots+\frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s}$$
$$+\frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^2}+\cdots+\frac{R_{\mu}x+S_{\mu}}{(x^2+rx+s)^{\mu}}.$$

其中 $A_i,\cdots,B_i,M_i,N_i,R_i,S_i$ 都是待定常数，$p^2-4q<0\cdots$，$r^2-4s<0$。

真分式$\frac{P(x)}{Q(x)}$分解为部分分式后，其积分$\int\frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x$ 实质上归结为下列四种类型的积分：

（1）$\int\frac{1}{x-a}\mathrm{d}x$ ；（2）$\int\frac{1}{(x-a)^n}\mathrm{d}x$

（3）$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$ ；（4）$\int\frac{1}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x$

（3）、（4）两种积分可将分母配成完全平方后，并用公式

$$I_n=\int\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2a^2(n+1)}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right.$$

$$+(2n-3)I_{n-1}\Big]$$

$$I_1=\int\frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+c$$

再继续积分，所以有理函数的原函数为初等函数。

2． 三角函数有理式积分法

$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$ （其中 $R(u,v)$ 是有理函数）

（1） 万能代换 $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\,(-\pi<x<\pi)$。

$$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

（2） 若 $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，令 $t=\sin x$；若 $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，令 $t=\cos x$；若 $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$，令 $t=\operatorname{tg}x$。

（3） 形如

$$\int\sin\alpha x\cos\beta x\mathrm{d}x,\ \int\sin\alpha x\sin\beta x\mathrm{d}x,\ \int\cos\alpha x\cos\beta x\mathrm{d}x;$$

的积分，先将被积函数化为和差，再积分。

（4） 形如 $\int\sin^m x\cos^n x\mathrm{d}x$ 的积分，应用第一类换元积分法(凑微分法)，或递推公式。

3． 无理函数积分法

对于无理函数的积分，一般先选取适当的变换，化为有理函数的积分，再计算之。

（1） $\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})\mathrm{d}x$，令 $x=a\sin t\ (a>0)$。

（2） $\int R(x,\sqrt{x^2+a^2})\mathrm{d}x$，令 $x=a\operatorname{tg}t\ \ (a>0)$。

（3）$\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})\mathrm{d}x$，令$x=a\sec t$ $(a>0)$。

（4）$\int R\left(x,\sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+d}},\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$，令$t=\sqrt[k]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$。

（k为m,n的最小公倍数）。

（5）$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x$.

除配方化为（1）、（2）、（3），用三角代换或双曲代换外，也可采用欧拉(Euler)代换：若$a>0$，令$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x$；若$ax^2+bx+c=0$有相异实根$\alpha$、$\beta$，令$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\alpha)$，这时$x=\dfrac{at^2-a\beta}{t^2-a}$。　$x=\dfrac{\alpha t^2-a\beta}{t^2-a}$

（6）$\int x^m(ax^n+b)^{\frac{p}{q}}\mathrm{d}x$（$m$、$n$、$p$、$q$为整数，$a$、$b\neq0$）

若$\dfrac{p}{q}$为整数，此时为有理函数积分；若$\dfrac{m+1}{n}$为整数，令$t=\sqrt[q]{ax^n+b}$；若$\dfrac{m+1}{n}+\dfrac{p}{q}$为整数，令$t=\sqrt[q]{a+bx^{-n}}$。

四、解 题 示 例

例 1　求$\int\dfrac{1}{\sin^2x\cos^2x}\mathrm{d}x$。

〔解〕　原式$=\int\dfrac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^2x\cos^2x}\mathrm{d}x$

$$=\int\frac{1}{\cos^2x}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{\sin^2x}\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{tg}x-\mathrm{ctg}x+c$$

此题解法很多。这里采用三角恒等变形与积分性质，基本积分公式，巧妙地将被积函数作初等恒等变形，再结合积分的各种基本方法，$\left(\text{如使积分化为}\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx\right.$，使用凑微分法即第一类换元法)，是计算积分的常用招法。

例 2 求$\int\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}dx$。

［解］ 原式$=\int\frac{1-\ln x}{x^2}\cdot\frac{dx}{\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)^2}$

$$=-\int\frac{1}{\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)^2}\cdot d\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)}+c=\frac{x}{x-\ln x}+c$$

例 3 求$\int\frac{1}{x(x^n+4)}dx$。

［解］ 原式$=\frac{1}{4}\int\frac{4+x^n-x^n}{x(x^n+4)}dx=\frac{1}{4}\int\frac{1}{x}dx$

$$-\frac{1}{4}\int\frac{x^{n-1}}{x^n+4}dx=\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{4n}\ln|x^n+4|$$

$$+c=\frac{1}{4n}\ln\left|\frac{x^n}{x^n+4}\right|+c$$

例 4 求$\int\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx$。

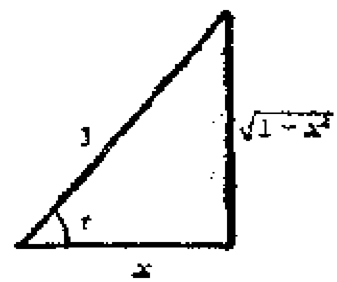
［解］ 本题的特点是被积函数含有无理式，需引入适当

的变量代换 $x=\varphi(t)$，使被积函数有理化。

方法 1：原式 $\xlongequal{x=\cos t}\int\frac{-\sin t}{\cos t\sin t}dt=-\int\sec t dt$

$=-\ln|\sec t+\operatorname{tg}t|+c$

$=-\ln\left|\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+c$



方法 2：原式 $\xlongequal{x=\frac{1}{t}}\int\frac{1}{\frac{1}{t}\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}}\cdot\frac{-1}{t^2}dt$

$$=-\int\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}dt$$

$$=-\ln|t+\sqrt{t^2-1}|+c$$

$$=-\ln\left|\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+c$$

方法 3：原式 $\xlongequal{\sqrt{1-x^2}=t}\int\frac{1}{t\sqrt{1-t^2}}\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}dt$

$$=-\int\frac{1}{1-t^2}dt=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right|+c$$

$$=-\ln\left|\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+c$$

由上面例看出，要使被积函数有理化，换元方法可取多种方法。

例 5 求 $\int\frac{1+x}{x(1+xe^x)}dx$ 。

[解] 令$t=e^x$，再设$u=t\ln t$，则

$$\int\frac{1+x}{x(1+xe^x)}dx=\int\frac{1-\ln t}{t\ln t(1+t\ln t)}dt=\int\frac{1}{u(1+u)}du$$

$$=\ln|u|-\ln|1+u|+c=\ln|t\ln t|-\ln|1+t\ln t|+c$$

$$=\ln|xe^x|-\ln|1+xe^x|+c=x+\ln\frac{x}{1+xe^x}+c$$

例 6 求$\int\frac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}dx$。

[解] 令$\sqrt{x}+\sqrt{1+x}=t$，则

$$x=\left(\frac{t^2-1}{2t}\right)^2,\quad dx=\frac{(t^2-1)(t^2+1)}{2t^3}dt$$

$$原式=\frac{1}{2}\int\frac{t^3-t^2+t-1}{t^3}dt=\frac{1}{2}\left(t-\ln t-\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}\right)+c$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sqrt{x}+\sqrt{1+x}-\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})\right.$$

$$\left.+(x-\sqrt{x+1})+\frac{1}{2}\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})^2}\right]+c$$

例 7 求$\int\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx$，$(a<x<b)$。

[解] 为了去掉根号，令

$$x-a=(b-a)\sin^2t,\quad b-x=(b-a)\cos^2t$$
$$dx=2(b-a)\sin t\cos t\,dt$$

$$原式=\int\frac{2(b-a)\sin t\cos t}{(b-a)\sin t\cos t}dt=2\int dt=2t+c$$

$$=\begin{cases} 2\arcsin\sqrt{\dfrac{x-a}{b-a}}+c \\ 2\arccos\sqrt{\dfrac{b-x}{b-a}}+c \\ 2\mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{x-a}{b-x}}+c \end{cases}$$

或原式$=\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}}\,dx$

$$=\arcsin\frac{x-\frac{a+b}{2}}{-\frac{(a-b)}{2}}+c=\arcsin\frac{2x-a-b}{b-a}+c$$

例 8　求$\displaystyle\int\frac{x^2}{x^2+1}\mathrm{arctg}x\,dx$。

[解]　原式$=\displaystyle\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}\mathrm{arctg}x\,dx$

$$=\int\mathrm{arctg}x\,dx-\int\frac{\mathrm{arctg}x}{x^2+1}dx$$

$$=x\,\mathrm{arctg}x-\int\frac{x}{x^2+1}dx-\frac{1}{2}(\mathrm{arctg}x)^2$$

$$=\left(x-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}x\right)\mathrm{arctg}x$$

$$-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c$$

例 9　求$I_n=\displaystyle\int\frac{1}{x^n\sqrt{1+x^2}}dx$的递推公式($n$为自然数)。

［解］ $I_{n-2}=\int\frac{1}{x^{n-2}\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x^{n-1}}\mathrm{d}\sqrt{1+x^2}$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n-1}}-\int(1-n)\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^n}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n-1}}-(1-n)\int\frac{1+x^2}{x^n\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n-1}}-(1-n)\left[\int\frac{1}{x^{n-2}\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x\right.$$

$$\left.+\int\frac{1}{x^n\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n-1}}-(1-n)(I_{n-2}+I_n)$$

移项得 $I_n=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{(n-1)x^{n-1}}+\frac{2-n}{n-1}I_{n-2}$

例10 求$\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-2}}\mathrm{d}x$。

［解］ 原式$=\int\frac{x}{\sqrt{e^x-2}}\mathrm{d}(e^x-2)=2\int x\mathrm{d}(\sqrt{e^x-2})$

$$=2x\sqrt{e^x-2}-2\int\sqrt{e^x-2}\,\mathrm{d}x$$

$$\int\sqrt{e^x-2}\,\mathrm{d}x\xlongequal[x=\ln(t^2+2)]{\sqrt{e^x-2}=t}\int\frac{2t^2}{t^2+2}\mathrm{d}t=\int\left(2-\frac{4}{t^2+2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=2t-\frac{4}{\sqrt{2}}\mathrm{arc\,tg}\frac{t}{\sqrt{2}}+c$$

$$=2\sqrt{e^x-2}-2\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{e^x}{2}-1}+c$$

$$\text{原式}=2x\sqrt{e^x-2}-4\sqrt{e^x-2}+4\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{e^x}{2}-1}+C$$

例11 在什么条件下，积分$\int\frac{ax^2+bx+p}{x^3(x-1)^2}dx$为有理函数。

[解] 由部分分式

$$\frac{ax^2+bx+p}{x^3(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x-1}+\frac{E}{(x-1)^2}$$

则 $ax^2+bx+p=Ax^2(x-1)+Bx(x-1)^2+C(x-1)^2+Dx^3(x-1)+Ex^3$

比较同次幂系数，得

$$A=a+2b+3p,\ B=b+2p,\ C=p$$
$$D=-(a+2b+3p),\ E=a+b+p$$

故当$A=D=0$时，即$a+2b+3p=0$时，积分$\int\frac{ax^2+bx+p}{x^3(x-1)^2}dx$为有理函数。

从理论上讲，有理函数总可以利用部分分式求出其积分，但不能死套上述方法，如有其他简便方法应及时使用。

例12 求$\int\frac{x}{x^8-1}dx$。

[解] 原式$=\int\frac{(x^4+1)-(x^4-1)}{4(x^4+1)(x^4-1)}dx^2$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{dx^2}{x^4-1}-\frac{1}{4}\int\frac{dx^2}{x^4+1}$$

$$=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|-\frac{1}{4}\mathrm{arctg}\,x^2+c$$

例13 求$\int \frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}\mathrm{d}x$。

［解］ 因为$R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$，故令$t=\operatorname{tg} x$。

$$\int \frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}\mathrm{d}x=\int \frac{1+t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t=\int \frac{1}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2}\mathrm{d}\left(t-\frac{1}{t}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{t-\frac{1}{t}}{\sqrt{2}}+c=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}^2 x-1}{\sqrt{2}\operatorname{tg} x}+c$$

例14 求$\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x$。

［解］ 若用万能代换$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$，很繁。令

$$(\sin x-\cos x)=A(\sin x+2\cos x)+B(\cancel{\sin x+2\cos x})\ \cos x-2\sin x$$
$$=(A-2B)\sin x+(2A+B)\cos x$$

比较两边系数，得

$$\begin{cases}A-2B=1,\\2A+B=-1\end{cases}$$

解得 $A=-\frac{1}{5}$，$B=-\frac{3}{5}$。于是

$$\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x$$
$$=\int\left[-\frac{1}{5}-\frac{3}{5}\,\frac{\cos x-2\sin x}{\sin x+2\cos x}\right]\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{x}{5}-\frac{3}{5}\ln|\sin x+2\cos x|+c$$

［注］ 此法适用于分子、分母均为$\sin x$，$\cos x$的一次式。

例15 求$\int\frac{1}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}dx$。

［解］ 作变换

$$\sqrt{x^2+x+1}=t-x,\quad x=\frac{t^2-1}{1+2t},\ dx=\frac{2(t^2+t+1)}{(1+2t)^2}dt$$

$$原式=\int\frac{1}{t(t+2)}dt=\ln\left|\frac{t}{t+2}\right|+c$$

$$=\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{x+2+\sqrt{x^2+x+1}}\right|+c$$

例16 求$\int\sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}dx$。

［解］ 此题若用变量代换有理化比较繁。

$$原式=\int\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-x^{3/2}}}dx=\frac{2}{3}\int\frac{1}{\sqrt{1-x^{3/2}}}d\,x^{\frac{3}{2}}$$

$$=-\frac{2}{3}\int\frac{1}{\sqrt{1-x^{3/2}}}d\,(1-x^{\frac{3}{2}})$$

$$=-\frac{4}{3}(1-x^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}+c$$

例17 求$\int\frac{x^4}{\sqrt[4]{1+x^4}}dx$。

［解］ 本题属于无理函数积分（6）型$\int x^m(ax^n+b)^{\frac{p}{q}}dx$。

这里$m=n=4$，$\frac{p}{q}=-\frac{1}{4}$，且$\frac{m+1}{n}+\frac{p}{q}=1$。

令

$$\sqrt[4]{1+x^{-4}}=t,\ x=(t^4-1)^{-\frac{1}{4}}$$

$$\int\frac{x^4}{\sqrt[4]{1+x^4}}\mathrm{d}x=\int x^3(1+x^{-4})^{-\frac{1}{4}}\mathrm{d}x$$

$$=\int(t^4-1)^{-\frac{3}{4}}t^{-1}[-t^3(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}]\mathrm{d}t=-\int\frac{t^2}{(t^4-1)^2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{1}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t-\frac{1}{16}\int\Big[\frac{1}{(t+1)^2}+\frac{1}{t+1}$$

$$+\frac{1}{(t-1)^2}-\frac{1}{t-1}\Big]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{8}\Big[\frac{t}{1+t^2}+\operatorname{arc\,tg}t\Big]+\frac{1}{16}\Big[\frac{1}{t+1}+\frac{1}{t-1}\Big]$$

$$+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+c$$

$$=\frac{1}{4}\frac{t^3}{t^4-1}+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+\frac{1}{8}\operatorname{arc\,tg}t+c$$

$$=\frac{1}{4}x\sqrt[4]{(1+x^4)^3}+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^4}-x}{\sqrt[4]{1+x^4}+x}\right|$$

$$+\frac{1}{8}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}\right)+c$$

例18 设 $f'(\ln x)=\frac{x}{2}(x>0)$，求 $f(x)$。

[解] 令 $t=\ln x$，则 $x=e^t$，故 $f'(t)=\frac{1}{2}e^t$，两边积分

$f(t)=\frac{1}{2}e^t+c$，即

$$f(x)=\frac{1}{2}e^x+c$$

例19 求$\int e^{-|x|}dx$。

[解] 当$x\geqslant 0$时，

$$\int e^{-|x|}dx=\int e^{-x}dx=-e^{-x}+c_1$$当$x<0$时，

$$\int e^{-|x|}dx=\int e^{x}dx=e^x+c_2$$

因$x=0$时，原函数连续，故$c=c_1-1=c_2+1$。于是

$$\int e^{-|x|}dx=\begin{cases}1-e^{-x}+c, & x\geqslant 0\\ e^x-1+c, & x<0\end{cases}$$

例20 求$\int\frac{\sin 2nx}{\sin x}dx$，$n$为自然数。

[解] 因为

$$\sin 2nx=\sum_{k=1}^{n}[\sin 2kx-\sin(2k-2)x]$$

$$=2\sin x\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x$$

所以 $$\int\frac{\sin 2nx}{\sin x}dx=2\int\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)xdx$$

$$=2\sum_{k=1}^{n}\int\cos(2k-1)xdx=2\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}+c$$

自我测试题

求下列不定积分。

1. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} \mathrm{d}x$

2. $\int \frac{\operatorname{tg} x}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} \mathrm{d}x$

3. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} \mathrm{d}x$

4. $\int \frac{3\sin x + 2\cos x}{2\sin x + 3\cos x} \mathrm{d}x$

5. $\int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} \mathrm{d}x$

6. $\int \frac{x^{2m-1}}{x^m + 1} \mathrm{d}x$

7. $\int \frac{x^5 - x}{x^8 + 1} \mathrm{d}x$

8. $\int \frac{1}{x^3 (x+1)} \mathrm{d}x$

9. $\int \ln^n x \mathrm{d}x$（n为自然数）

10. $\int e^{\arcsin\sqrt{x}} \mathrm{d}x$

11. $\int \frac{\ln 2x}{\ln 4x} \frac{\mathrm{d}x}{x}$

12. $\int e^x \frac{1+\sin x}{1+\cos x} \mathrm{d}x$

13. $\int (|1+x| - |1-x|) \mathrm{d}x$

14. $\int \frac{1}{\sin(x+a)\sin(x+b)} \mathrm{d}x$，（$a-b \neq k\pi$，$k$为整数）

15． 求$f(x)=\max(1,x^2)$的一个原函数。

16． 已知$f(x)$的一个原函数为$(1+\sin x)\ln x$，求$\int xf'(x)\mathrm{d}x$。

17 已知$f'(\cos x+2)=\sin^2 x+\mathrm{tg}^2 x$，求$f(x)$。

提示与答案

1． $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\lg x+c$　　2． $\frac{1}{2a^2}\ln(a^2\mathrm{tg}^2x+b^2)+c$

3． $-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}(\cos 2x)+c$

4． $\frac{12}{13}x-\frac{15}{13}\ln|2\sin x+3\cos x|+c$

5． 作变换$\sqrt{x^2+x+1}=t-x$，$\frac{1}{2}\ln\frac{t^4}{|2t+1|^3}$

$+\frac{3}{2(2t+1)}+c,t=x+\sqrt{x^2+x+1}$

6． $\frac{1}{m}(x^m-\ln|x^m+1|)+c$

7． $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}x^2+1}{x^4+\sqrt{2}x^2+1}\right|+c$

8． $\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}-\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|+c$

9． $x[\ln^n x-n\ln^{n-1}x+n(n-1)\ln^{n-2}x$

$-\cdots+(-1)^n n!]+c$

10. $\frac{2}{5}[\sqrt{x(1-x)}+2x-1]e^{\arcsin\sqrt{x}}+c$

11. $\ln x-(\ln 2)\ln\ln 4x+c$

12. $-e^x\operatorname{ctg}x+\frac{e^x}{\sin x}+c$

13. $\frac{1}{2}[(x+1)|x+1|+(1-x)|1-x|]+c$

14. $\frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)}\right|+c$

15. 原函数 $\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}, & x<-1\\ x & ,|x|\leqslant 1\\ \frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}, & x>1\end{cases}$

16. $xf(x)-(1+\sin x)\ln x+c$

17. $-\frac{(x-2)^2}{3}-\frac{1}{x-2}+c$

§3.2 定 积 分

一、定积分及基本性质

由前述积分的统一定义，定积分为如下的和式极限，即

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

若$f(x)$在$[a,b]$上连续，或$f(x)$在$[a,b]$上单调有界，或$f(x)$在$[a,b]$上有界且只有有限个第一类间断点，则$\int_a^b f(x)dx$

存在。

若$a>b$，则$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$；又$\int_a^a f(x)\,dx=0$。

（1）$\int_a^b [k_1 f(x)+k_2 g(x)]\,dx$

$$=k_1\int_a^b f(x)\,dx+k_2\int_a^b g(x)\,dx$$

（2）$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$

（3）若$f(x)\leqslant g(x)$（$x\in[a,b]$），则

$$\int_a^b f(x)\,dx\leqslant\int_a^b g(x)\,dx$$

特别，

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leqslant\int_a^b |f(x)|\,dx$$

又若$m\leqslant f(x)\leqslant M$，则

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\,dx\leqslant M(b-a)$$

（4）广义中值定理：设$f(x)$在$[a,b]$上连续，$g(x)$在$[a,b]$上可积且不变号，则必有$\xi\in[a,b]$，使

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$$

特别是当$g(x)\equiv1$时，便得一般的中值定理。

（5）变上限求导定理：设$f(x)$在$[a,b]$上连续，则$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$在$[a,b]$上可导，且$F'(x)=f(x)$。

二、定积分计算方法

1. 牛顿(Newton)-莱布尼兹(Leibniz)公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

其中　$F'(x)=f(x)$

2. 换元积分法

设$f(x)$在$[a,b]$上连续，$x=\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有连续导数，又$a=\varphi(\alpha)$，$b=\varphi(\beta)$，$a\leqslant\varphi(t)\leqslant b$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

3. 分部积分法

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x=[u(x)v(x)]\Big|_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x$$

三、解题示例

应用换元积分法，可得到以下常用公式，借助于它们将提高计算定积分的技能。

(1) $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x$

(2) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\begin{cases}2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & f(x)\text{为偶函数}\\ 0, & f(x)\text{为奇函数}\end{cases}$

(3) 若$f(x)$是以T为周期的周期函数，则

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\mathrm{d}x$$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$

(5) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$$

下述是关于定积分定义与性质的示例。

例 1 用定义计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$。

[解] $f(x)=\sin x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续，故可积。将 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ n 等分，对于小区间 $[x_i\ \ x_{i+1}]$。取其左端点 $x_i=\xi_i$ $(i=0,1,2\cdots(n-1))$，则积分和式为

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}\sin(\xi_i)\Delta x_i$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\left[\sin\frac{i\left(\frac{\pi}{2}-0\right)}{n}\right]\frac{\frac{\pi}{2}-0}{n}$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\pi}{2n}\sin\frac{\pi i}{2n}\cdot\sin\frac{\pi}{4n}\bigg/\sin\frac{\pi}{4n}$$

$$=\frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}\sum_{i=0}^{n-1}\sin\frac{i\pi}{2n}\sin\frac{\pi}{4n}$$

$$=\frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{n-1}{4n}\pi$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\frac{4n}{\pi}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4n}\right)}{\sin\frac{\pi}{4n}}$$

则$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4n}\right)\frac{\frac{\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}=1$$

例 2 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$f(x)>0$，求

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n-1}{n}\right)f(1)}$$

［解］ 因为

$$\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n-1}{n}\right)f(1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln f\left(\frac{1}{n}\right)+\ln f\left(\frac{2}{n}\right)\right.$$

$$\left.+\cdots+\ln f\left(\frac{n-1}{n}\right)+\ln f(1)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\ln f\left(\frac{i}{n}\right)=\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x$$

故　　原式$=e^{\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x}$

例 3 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(x)>0$，又

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$$

证明：$F(x)=0$在$[a,b]$内有唯一实根。

［证］ 因为

$$F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}=\frac{1+f^2(x)}{f(x)}>0$$

故$F(x)$在$[a,b]$内单调增加，所以$F(x)=0$在$[a,b]$内至多有一实根。

又因

$$F(a)=\int_a^a f(t)\mathrm{d}t+\int_b^a \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x<0,$$

$$F(b)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$$

且$F(x)$在$[a,b]$上连续，由介值定理，$F(x)=0$在$[a,b]$内至少有一实根，故$F(x)=0$在$[a,b]$内有唯一实根。

例 4　已知$\varphi(x)=\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t$在$-1<x<1$时有意义，证明

$$\varphi(x)+\varphi(-x)=\frac{1}{2}\varphi(x^2)$$

[证]　令　$F(x)=\varphi(x)+\varphi(-x)-\frac{1}{2}\varphi(x^2)$

则
$$F'(x)=\left[\varphi(x)+\varphi(-x)-\frac{1}{2}\varphi(x^2)\right]'$$
$$=\frac{\ln(1-x)}{x}+\frac{\ln(1+x)}{x}$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\cdot 2x=0$$

故$F(x)=c$。由于

$$F(0)=\varphi(0)+\varphi(0)-\frac{1}{2}\varphi(0)=0$$

所以$F(x)=0$，即

$$\varphi(x)+\varphi(-x)=\frac{1}{2}\varphi(x^2)$$

例 5　设$f(x)$，$g(x)$在$[a,b]$上连续，证明

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$

［证］　记

$$A=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x,\quad B=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x,\quad C=\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$

要证不等式成立，只要$B^2\leqslant AC$，即$B^2-AC\leqslant0$。

于是联想到可利用二次三项的判别式，对于任意实数λ，有

$$[\lambda f(x)+g(x)]^2\geqslant0$$

即
$$\lambda^2f^2(x)+2\lambda f(x)g(x)+g^2(x)\geqslant0$$

故
$$\lambda^2\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x+2\lambda\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant0$$

上式左边是关于λ 的二次三项式，其判别式$\Delta=B^2-AC\leqslant0$。故

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$

下面是关于分段函数的积分示例。

例 6　已知

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & |x|<\dfrac{\pi}{2}\\[2ex] 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

计算 $I(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$。

［解］　当 $x\leqslant-\dfrac{\pi}{2}$时，

$$I(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^{-\frac{\pi}{2}}\sin t\mathrm{d}t+\int_{-\frac{\pi}{2}}^x 0\mathrm{d}x=1;$$

当$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$时，

$$I(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x \sin t\,dt=1-\cos x$$

当　$x\geqslant\frac{\pi}{2}$时，

$$I(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^x 0\,dt=1$$

因此

$$I(x)=\begin{cases}1, & |x|\geqslant\frac{\pi}{2}\\ 1-\cos x, & |x|<\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

例 7　计算$\int_0^1 x|x-a|\,dx$。

〔解〕　若$a<0$，则

$$\text{原式}=\int_0^1 x(x-a)\,dx=\frac{1}{3}-\frac{a}{2}$$

若$0\leqslant a<1$，此时

$$x|x-a|=\begin{cases}x(a-x) & 0\leqslant x<a\\ x(x-a) & a\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

故　$$\int_0^1 x|x-a|\,dx=\int_0^a x(a-x)\,dx+\int_a^1 x(x-a)\,dx$$

$$=\frac{a^3}{3}-\frac{a}{2}+\frac{1}{3}$$

若$a>1$，则

$$\int_0^1 x|x-a|\,dx=\int_0^1 x(a-x)\,dx=\frac{a}{2}-\frac{1}{3}$$

故

$$\int_0^1 x|x-a|\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{1}{3}-\dfrac{a}{2}, & a<0\\[2mm] \dfrac{a^3}{3}-\dfrac{a}{2}+\dfrac{1}{3}, & 0\leqslant a\leqslant 1\\[2mm] \dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{3}, & a>1\end{cases}$$

下述是应用牛-莱公式、换元法和分部积分法的示例

例 8 计算$\int_0^\pi \dfrac{\sin 2nx}{\sin x}\mathrm{d}x$。

〔解〕 因为$x=0$，$x=\pi$是第一类间断点，故可积。

方法 1：因为

$$\int \frac{\sin 2nx}{\sin x}\,\mathrm{d}x=2\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}+c$$

故
$$\int_0^\pi \frac{\sin 2nx}{\sin x}\mathrm{d}x=2\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}\right]_0^\pi=0$$

方法 2：令 $x=\dfrac{\pi}{2}-t$，$\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$

$$\int_0^\pi \frac{\sin 2nx}{\sin x}\,\mathrm{d}x=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(n\pi-2nt)}{\cos t}\mathrm{d}t$$

$$=(-1)^{n+1}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2nt}{\cos t}\mathrm{d}t=0$$ （~~奇~~函数）
偶

例 9 计算$\int_0^1 \dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$。

〔解〕 因被积函数$\dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}$的原函数，不能用初等函数

表示，无法应用牛顿-莱布尼兹公式。

令
$$x=\frac{1-t}{1+t}$$

则
$$dx=\frac{-2}{(1+t)^2}dt$$

故
$$I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx=\int_1^0\frac{\ln\frac{2}{1+t}}{1+\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2}\cdot\frac{-2}{(1+t)^2}dt$$

$$=\int_0^1\frac{\ln 2-\ln(1+t)}{1+t^2}dt=\ln 2\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt-I$$

从而
$$2I=\ln 2[\mathrm{arctg}\,t]_0^1=\frac{\pi\ln 2}{4}$$

$$I=\frac{\pi}{8}\ln 2$$

例10 计算$I_n=\int_0^{n\pi}x|\sin x|dx$其中 n 为自然数。

［解］ 被积函数不是周期函数，无法应用周期函数定积分计算性质。若采用分段积分，较繁。

令$n\pi-x=t$，则$dx=-dt$，

$$I_n=\int_0^{n\pi}x|\sin x|dx=-\int_{n\pi}^0(n\pi-t)|\sin(n\pi-t)|dt$$

$$=-\int_0^{n\pi}t|\sin t|dt+n\pi\int_0^{n\pi}|\sin t|dt$$

移项 $2I_n=n\pi\int_0^{n\pi}|\sin t|dt=n\pi\cdot n\int_0^{\pi}\sin t\,dt=n^2\cdot 2\pi$

（这里用到$|\sin t|$是以π为周期的周期函数）。故得

$$I_n=n^2\pi$$

例11 计算$\int_0^{\frac{1}{2}} x\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x$。

〔解〕 原式$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x^2$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right]_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{2}{(1-x)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{8}\ln 3+\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^2}{x^2-1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{8}\ln 3+\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{8}\ln 3+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{8}\ln 3+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 3=\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\ln 3$$

例12 计算$\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\mathrm{d}x$。

〔解〕 原式$=\int_{-1}^{1}(x+1)^n(x-1)^n\mathrm{d}x$

$$=\left[\frac{1}{n+1}(x-1)^{n+1}(x+1)^n\right]_{-1}^{1}$$

$$-\frac{n}{n+1}\int_{-1}^{1}(x-1)^{n+1}(x+1)^{n-1}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{n}{n+1}\int_{-1}^{1}(x-1)^{n+1}(x-1)^{n-1}\mathrm{d}x$$

$=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$=(-1)^k\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}$$

$$\times\int_{-1}^{1}(x-1)^{n+k}(x+1)^{n-k}\mathrm{d}x$$

$$=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=(-1)^n\frac{n!}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}\int_{-1}^{1}(x-1)^{2n}\mathrm{d}x$$

$$=(-1)^n\frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

或令$x=\sin t$，

$$原式=(-1)^n\cdot 2\int_0^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x=(-1)^n 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}t\mathrm{d}t$$

应用 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x$

$$=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n为偶数\\[2ex] \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}, & n为奇数\end{cases}$$

所以 $\displaystyle 原式=(-1)^n\frac{2(2n)!!}{(2n+1)!!}=(-1)^n\frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{(2n+1)!}$

下面是有关变上、下限的积分计算示例。

例13 设 $f(x)=\displaystyle\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\mathrm{d}t$，证明$f(x+\pi)=f(x)$，并求$f(x)$的最大值与最小值。

［解］ 令$t=u-\pi$，则$|\sin t|=|\sin u|$，故

$$f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\mathrm{d}t=\int_{x+\pi}^{x+\pi+\frac{\pi}{2}}|\sin u|\mathrm{d}u=f(x+\pi)$$

因$f(x)$是以π为周期的周期函数，只需求$[0,\pi]$上$f(x)$的最大值与最小值即可。

当 $0<x<\frac{\pi}{2}$，即$\frac{\pi}{2}<x+\frac{\pi}{2}<\pi$ 时，

$$f(x)=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\mathrm{d}t=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}\sin t\mathrm{d}t=\cos x+\sin x$$

当$\frac{\pi}{2}<x<\pi$，即$\pi<x+\frac{\pi}{2}<\frac{3\pi}{2}$时，

$$f(x)=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\mathrm{d}t=\int_{x}^{\pi}\sin t\mathrm{d}t-\int_{\pi}^{x+\frac{\pi}{2}}\sin t\mathrm{d}t$$
$$=2+\cos x-\sin x$$

且 $f(0)=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin t\mathrm{d}t=1$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin t\mathrm{d}t=1$，

$$f(\pi)=-\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\sin t\mathrm{d}t=1$$

故$f(x)$为$(-\infty, +\infty)$上的连续函数，

$$f(x)=\begin{cases}\cos x+\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\\ 2+\cos x-\sin x, & \frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\cos x-\sin x, & 0<x<\frac{\pi}{2}\\ -\sin x-\cos x, & \frac{\pi}{2}<x<\pi\end{cases}$$

又 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$，$f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=2-\sqrt{2}$

故 $\max f(x)=\sqrt{2}$，$\min f(x)=2-\sqrt{2}$

下面列举一些关于定积分证明题的例子。

关于定积分的证明题，常采用的方法有计算性证明法，归纳性证明法，综合性证明法，分析性证明法及反证性证明法。

例14 设$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}^n x\mathrm{d}x$，$n>1$的自然数，证明：

（1）$I_n+I_{n-2}=\frac{1}{n-1}$；（2）$\frac{1}{2(n+1)}<I_n<\frac{1}{2(n-1)}$。

［证］（1）$I_n+I_{n-2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}^{n-2}x(1+\mathrm{tg}^2x)\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}^{n-2}x\mathrm{d}(\mathrm{tg}x)=\frac{1}{n-1}[\mathrm{tg}^{n-1}x]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n-1}$$

（2）由（1）可得

$$I_{n+2}+I_n=\frac{1}{n+1}$$

假设$I_n>\frac{1}{2(n+1)}$不成立，即$I_n\leqslant\frac{1}{2(n+1)}$。从而$I_{n+2}\leqslant\frac{1}{2(n+3)}$，于是

$$I_n+I_{n+2}\leqslant\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+3)}<\frac{1}{n+1}$$

与（1）矛盾，故$I_n>\frac{1}{2(n+1)}$，类似可证$I_n<\frac{1}{2(n-1)}$。

故

$$\frac{1}{2(n+1)}<I_n<\frac{1}{2(n-1)}$$

例15 证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\cdots+\frac{2^n}{n}\right)$$

其中 n 是自然数。

〔证〕 用数学归纳法。当$n=1$时，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \qquad 成立。$$

假设$n=k$时原式成立，即

$$I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^k x \ \sin kx \mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2^{k+1}}\left(\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\cdots+\frac{2^k}{k}\right)$$

则当$n=k+1$时，

$$I_{k+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{k+1} x \sin(k+1)x \mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{k+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{k+1} x \mathrm{d}[\cos(k+1)x]$$

$$= -\frac{1}{k+1}[\cos^{k+1} x \cos(k+1)x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^k x \cos(k+1)x \sin x \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{k+1} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^k x \cos(k+1)x \sin x \mathrm{d}x$$

上式两边加I_{k+1}，得

$$2I_{k+1} = \frac{1}{k+1} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^k x \sin(k+1)x \cos x \mathrm{d}x$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^k x \cos(k+1)x \sin x \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{k+1} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^k x \sin(k+1-1)x \mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{k+1}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^k x\sin kx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{k+1}+I_k$$

则 $$I_{k+1}=\frac{1}{2(k+1)}+\frac{1}{2}I_k$$

$$=\frac{1}{2(k+1)}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{k+1}}\left(\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\cdots+\frac{2^k}{k}\right)$$

$$=\frac{1}{2^{k+2}}\left(\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\cdots+\frac{2^k}{k}+\frac{2^{k+1}}{k+1}\right)$$

即 $n=k+1$ 时，原式也成立，由数学归纳法可知，对一切自然数 n 原式均成立。

例16 证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$，并求其值。

［证］ 要证上式成立，只要证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}-\frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\right]\mathrm{d}\theta=0$$

而 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta=[\ln|\sin\theta+\cos\theta|]_0^{\frac{\pi}{2}}=0$$

故 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$

于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{4}$$

例17 证明$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d} x>\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d} x$。

［证］ 要证明上式成立，只需证

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d} x>c>\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d} x$$

而
$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d} x \xlongequal{x=\sin t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos (\sin t) \mathrm{d} t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos (\sin x) \mathrm{d} x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1-\frac{1}{2!} \sin ^2 x+\frac{1}{4!} \sin ^4 x-\cdots\right] \mathrm{d} x$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{4!}\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}\right)-\cdots$$

即满足莱布尼兹条件，故

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d} x>\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}=\frac{3}{8} \pi>\frac{9}{8}=c$$

而

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d} x<\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d} x$$

$$=\left[-\sqrt{1-x^2}\right]_0^1=1<\frac{9}{8}=c$$

所以

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d} x>\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d} x$$

例18 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，证明：若对任意选定的连续函数$\varphi(x)$，都有$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=0$，则 $f(x)=0$ $(x\in[a,b])$。

［证］ 反证法。设在$[a,b]$上某点 ξ，有 $f(\xi)\neq 0$，不妨设$f(\xi)>0$，由$f(x)$的连续性，则存在x_1，x_2，$a<x_1<\xi<x_2<b$，使得在$[x_1\ x_2]$上$f(x)>0$，取

$$\varphi(x)=\begin{cases}0 & , \ 0\leqslant x\leqslant x_1\\ (x-x_1)^2(x-x_2)^2 & , \ x_1<x<x_2\\ 0 & , \ x_2\leqslant x\leqslant b\end{cases}$$

则
$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=\int_{x_1}^{x_2} f(x)(x-x_1)^2(x-x_2)^2\,dx>0$$

但$\varphi(x)$连续，由假设却有$\int_a^b \varphi(x)f(x)\,dx=0$，得出矛盾，故在$[a,b]$上，$f(x)\equiv 0$。

例19 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$\int_0^1 f(x)\,dx=0$，$\int_0^1 xf(x)\,dx=0$，……，$\int_0^1 x^{n-1}f(x)\,dx=0$，$\int_0^1 x^n f(x)\,dx=1$，证明：$|f(x)|\geqslant 2^n(n+1)$在$[0,1]$上的某一部分上成立。

［证］ 考察 $I=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^n f(x)\,dx$，由条件知

$$I=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^n f(x)\,dx=1$$

用反证法。设在$[0,1]$上处处有 $|f(x)|<2^n(n+1)$，于是

$$I=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^n f(x)\,dx\leqslant\int_0^1\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)^n f(x)\right|dx$$

$$<2^n(n+1)\int_0^1\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)^n\right|dx$$

$$=2^n(n+1)\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-x\right)^n dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^n dx\right]$$

$$=2^n(n+1)\left\{\left[-\frac{\left(\frac{1}{2}-x\right)^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}\right]_{\frac{1}{2}}^1\right\}$$

$$=2^n(n+1)\left[\frac{1}{2^{n+1}(n+1)}+\frac{1}{2^{n+1}(n+1)}\right]=1$$

即 $\quad I=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^n f(x)dx<1$，与假设条件相矛盾。

所以 $|f(x)|\not<2^n(n+1)$，即 $|f(x)|\geqslant 2^n(n+1)$ 在 $[0,1]$ 上某部分成立。

自 我 测 试 题

计算下列定积分。

1. $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$； 2. $\int_1^e (x\ln x)^2 dx$；

3. $\int_0^{2n\pi}|\sin x|dx$； 4. $\int_{-2}^2(|x|+x)e^{-|x|}dx$；

5. $\int_0^1 x\arcsin 2\sqrt{x(1-x)}\,dx$

6. $\int_{-3}^2\min(2,x^2)dx$

7. $\int_0^1\frac{1}{(x+1)\sqrt{1+x^2}}dx$

8. $\int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t$，其中$f(t)=\int_1^{t^2} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$

9. $\int_x^{2\ln 2} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^t-1}}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{6}$，求$x=$？

10. 确定常数α,β，使得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\alpha x-\sin x}\int_0^x \frac{t^2}{\beta+3t}\,\mathrm{d}t=2$$

11. 证明

$$\int_1^a f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_1^a f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

12. 对于$x\geqslant 0$，证明：$f(x)=\int_0^x (t-t^2)\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t$（$n$为自然数）的最大值不超过$\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$.

13. 证明

$$\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}<\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x<\sqrt{2}$$

14. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(x)>0$，证明

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant (b-a)^2$$

15. 计算$I=\int_0^\pi \frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}\mathrm{d}x$ （n为自然数）。

提 示 与 答 案

1. $2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$；　　　　2. $\frac{5}{27}\mathrm{e}^3-\frac{1}{27}$；

3. $4n$;　　4. $2-6e^{-2}$;

5. $\frac{1}{2}$;　　6. $10-\frac{8}{3}\sqrt{2}$;

7. $\frac{1}{\sqrt{2}}(\ln\sqrt{2}+1)$;　8. $\frac{1}{4}(e^{-4}-1)$;

9. $x=\ln 2$.　　10. $\alpha=1$, $\beta=1$.

11. 先作变换 $t=x^2$，再作 $u=\frac{a^2}{t}$.

12. 利用 $f'(x)$ 来讨论.

13. 利用估值定理.

14. 利用非负二次三项式判别式.

15. 先作 $I=I_n$ 的递推公式　$I=\pi$.

§3.3 重　积　分

一、重积分及基本性质

本节研究 $f(x,y)$ 在平面区域 D 上的二重积分

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\zeta_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

及 $f(x,y,z)$ 在空间区域 Ω 上的三重积分

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dV=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$$

二重积分与三重积分的性质类似，我们仅对二重积分叙述之

若函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上连续，或分块连续，

则$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$存在。

（1）$\iint\limits_D [K_1 f(x,y)+k_2 g(x,y)]\,d\sigma = K_1\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$

$+K_2\iint\limits_D g(x,y)\,d\sigma$

（2）$\iint\limits_D d\sigma=\sigma$（$\sigma$为区域$D$的面积）

（3）若$D-D_1+D_2+\cdots+D_n$（只有公共边界），则

$$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma=\sum_{i=1}^{n}\iint\limits_{D_i} f(x,y)\,d\sigma$$

（4）若$f(x,y)\leqslant g(x,y)$，$(x,y)\in D$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma\leqslant\iint\limits_D g(x,y)\,d\sigma$$

又若$m\leqslant f(x,y)\leqslant M$，$(x,y)\in D$，则

$$m\sigma\leqslant\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma\leqslant M\sigma$$

（5）若$f(x,y)$在D上连续，σ为D的面积，则至少有一点$(\xi,\eta)\in D$，使得

$$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma=f(\xi,\eta)\sigma$$

二、二重积分计算方法

1. 化为累次积分

直角坐标系：若积分区域为

$D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,\ y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x)\}$

则
$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

极坐标系：$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$\mathrm{d}\sigma=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$。

若积分区域
$$D=\{(r,\theta)\mid\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,\ r_1(\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\theta)\}$$
则
$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$
$$=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\mathrm{d}r$$

2. 一般换元公式

设 $x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$ 都在平面 uov 上闭区域 D' 上连续，具有一阶连续偏导数，且雅可比(Jacobi)行列式
$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0,\ (x,y)\in D'$$
又 $x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$ 将 D' 一一映为 D，$f(x,y)$ 在 D 上连续，则
$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'} f[x(u,v),y(u,v)]\,|J|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

三、三重积分计算方法

1. 直角坐标系

若积分区域

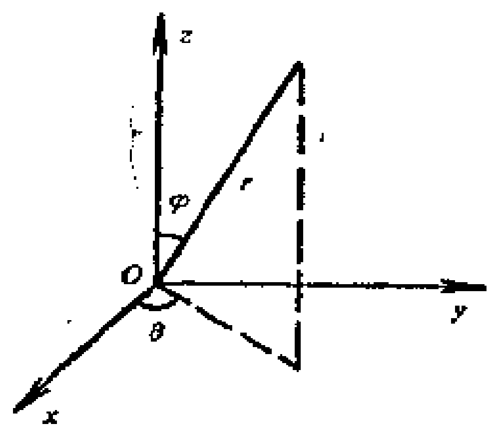
$$\Omega=\{(x,y,z)\mid a\leqslant x\leqslant b,\ \ y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),\ \ z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y)\}$$

则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

截面法：设Ω介于平面$z=z_1$与$z=z_2(z_1<z_2)$之间，记$D(z)$为垂直于oz轴截距为z的平面与Ω相交之平面区域，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v=\int_{z_1}^{z_2}\mathrm{d}z\iint\limits_{D(z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



2. 柱坐标系

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta,\quad \mathrm{d}V=r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\\ z=z\end{cases}$$

若Ω：$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$，$r_1(\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\theta)$，$z_1(r,\theta)\leqslant z\leqslant z_2(r,\theta)$，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r\,\mathrm{d}r\int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\,\mathrm{d}z$$

3. 球坐标系

设

$$\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta\\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\quad \mathrm{d}V=r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r\\ z=r\cos\varphi\end{cases}$$

若Ω：$\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$，$\gamma \leqslant \varphi \leqslant \delta$，$r_1(\theta,\varphi) \leqslant r \leqslant r_2(\theta,\varphi)$，

则 $$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V$$

$$=\iiint\limits_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)\, r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}\theta\int_{\gamma}^{\delta}\mathrm{d}\varphi\int_{r_1(\theta,\varphi)}^{r_2(\theta,\varphi)} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)\, r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r$$

对于三重积分，也有与二重积分类似的换元积分公式。

二重积分化为累次积分时要注意：

（1）定限是计算二重积分的难点，化为累次积分时，内限是后一积分变量的函数或常数，而外限一定是常数，且上限大于下限；

（2）选择积分次序的原则是：首先是使两个累次积分能积出来，其次是积分区域划分符合上面所提要求；

（3）只有当D对称，且$f(x,y)$在D上也对称时，才能将二重积分化为部分区域上二重积分的若干倍来计算。

计算二重积分的具体步骤：

（1）作出积分区域D的草图；

（2）根据D与$f(x,y)$的情况恰当地选择坐标系（直角坐标系，极坐标系或其他曲线坐标）；

（3）由D与$f(x,y)$选择恰当的积分次序，并根据草图确定累次积分的上、下限。选择坐标系的一般原则是，直角坐标系适合于矩形、三角形或任意直线所围成的区域D；极坐标系适合于圆形、扇形、环形区域D。选择积分次序首先要能积得出来，然后，考虑先对y，后对x积分；或者先对

x，后对y积分。

计算三重积分和计算二重积分一样，首先考虑采用什么坐标系（这要根据$f(x,y,z)$和Ω而定）或作换元法，然后化为累次积分计算。其关键还是确定积分限，一般来说比二重积分复杂。

四、解题示例

例 1 判断积分$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$的符号。

［解］

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma$$

$$-\iint\limits_{1\leqslant x^2+y^2\leqslant 3}\sqrt[3]{x^2+y^2-1}\,\mathrm{d}\sigma$$

$$-\iint\limits_{3\leqslant x^2+y^2\leqslant 4}\sqrt[3]{x^2+y^2-1}\,\mathrm{d}\sigma$$

$$<\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\mathrm{d}\sigma-\iint\limits_{3\leqslant x^2+y^2\leqslant 4}\sqrt[3]{3-1}\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=\pi-\sqrt[3]{2}\,\pi(4-3)=\pi(1-\sqrt[3]{2})<0$$

例 2 计算下列二重积分。

（1）$\iint\limits_{D}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$由$y^2=x$与$y=x$所围区域；

（2）$\iint\limits_{D}|x^2-y|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$由$x=0$，$x=1$，$y=0$与$y=1$

所围区域；

（3）$\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$：$x^2+y^2\leqslant Ry$。

［解］（1）作草图。

因被积函数$\dfrac{\sin y}{y}$的原函数不是初等函数，所以先对y积积分不行，应先对x积分，后对y积分才行。

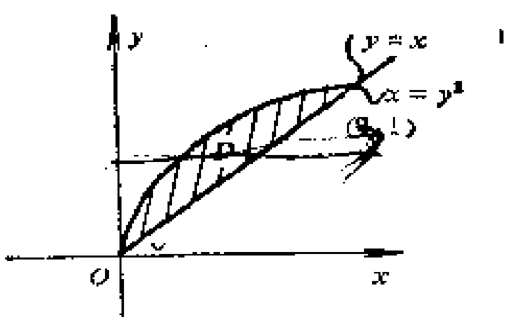
$$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1,\ y^2\leqslant x\leqslant y\}$$

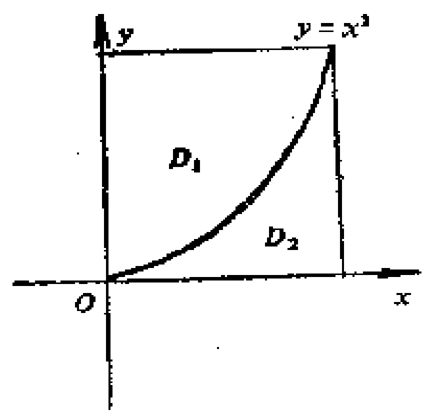
故 $$\iint\limits_D \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\frac{\sin y}{y}(y^2-y)\mathrm{d}y=\int_0^1(\sin y-y\sin y)\mathrm{d}y$$

$$=1-\sin 1$$

（2）被积函数带有绝对值，而D为正方形，$y=x^2$将D分成D_1，D_2，在D_1中，$y>x^2$；在D_2中，$y<x^2$，这样可将绝对值去掉。





故 $$\iint\limits_D |x^2-y|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}|x^2-y|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}|x^2-y|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

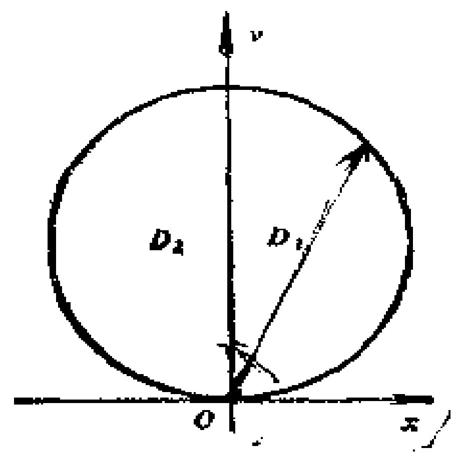
$$=\iint\limits_{D_1}(y-x^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}(x^2-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^1(y-x^2)\,\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}(x^2-y)\,\mathrm{d}y=\frac{11}{30}$$

(3) D: $x^2+y^2\leqslant Ry$，即$r^2\leqslant Rr\sin\theta$，$r\leqslant R\sin\theta$，故

$$D=\{(r,\theta)\,|\,0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ 0\leqslant r\leqslant R\sin\theta\}$$

由于D对称于y轴，且被积函数是x的偶函数，故



$$\iint\limits_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iint\limits_{D_1}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{R\sin\theta}\sqrt{R^2-r^2}\,r\,\mathrm{d}r$$

$$=-\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{R\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{2}{3}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^3\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{3}R^3\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$$

例 3 改变下列积分次序。

(1) $\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{2}{\cos\theta}}f(r,\theta)\,\mathrm{d}r$，$\theta$、$r$为极坐标变量。

(2) $\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}f(x,y)\,\mathrm{d}y\qquad(a>0)$

［解］ 本例解法可分三步，第一由所给累次积分上、下限列出D的不等式组；第二由不等式组作D草图；第三写出

新的累次积分。

(1) $D=\left\{(r,\theta)\middle|\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3},\ 0\leqslant r\leqslant\frac{2}{\cos\theta}\right\}=D_1+D_2$

$$=\left\{(r,\theta)\middle|0\leqslant r\leqslant 2\sqrt{2},\ \frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}\right\}$$

$$+\left\{(r,\theta)\middle|2\sqrt{2}\leqslant r\leqslant 4,\ \arccos\frac{2}{r}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}\right\}$$

因为 $OA=4,\ OB=2\sqrt{2}$

故 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{2}{\cos\theta}}f(r,\theta)\mathrm{d}r=\int_0^{2\sqrt{2}}\mathrm{d}r\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}f(r,\theta)\mathrm{d}\theta$

$$+\int_{2\sqrt{2}}^{4}\mathrm{d}r\int_{\arccos\frac{2}{r}}^{\frac{\pi}{3}}f(r,\theta)\mathrm{d}\theta$$

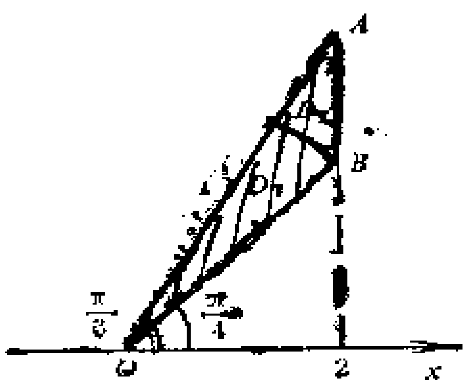
(2) $D=\{(x,y)|\ 0\leqslant x\leqslant 2a,\ \sqrt{2ax-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{2ax}\}$

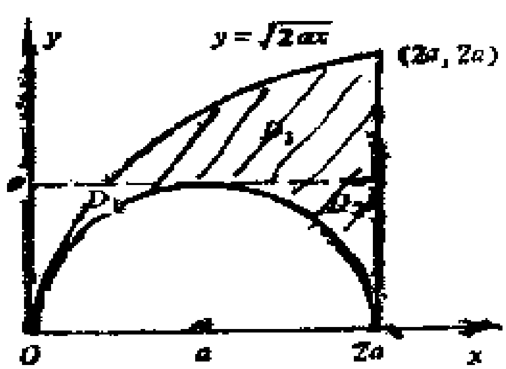
$$=D_1+D_2+D_3$$

$$=\left\{(x,y)\middle|0\leqslant y\leqslant a,\ \frac{y^2}{2a}\leqslant x\leqslant a-\sqrt{a^2-y^2}\right\}$$

$$+\{(x,y)|0\leqslant y\leqslant a,\ a+\sqrt{a^2-y^2}\leqslant x\leqslant 2a\}$$

$$+\left\{(x,y)\middle|a\leqslant y\leqslant 2a,\ \frac{y^2}{2a}\leqslant x\leqslant 2a\right\}$$





故 $$\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^a\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

$$+\int_0^a\mathrm{d}y\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a}f(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_a^{2a}\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a}f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

例 4 计算下列二重积分。

（1）$\iint\limits_D(|x|+|y|)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\quad D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\leqslant 2\}$；

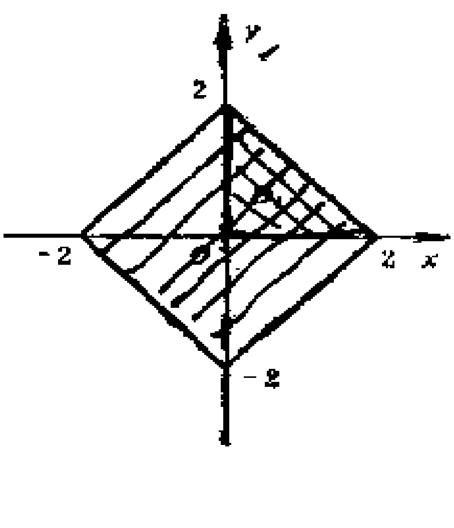
（2）$\iint\limits_D x[1+yf(x^2+y^2)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 由 $y=x^3$，$y=1$，$x=-1$围成区域，f是连续函数。

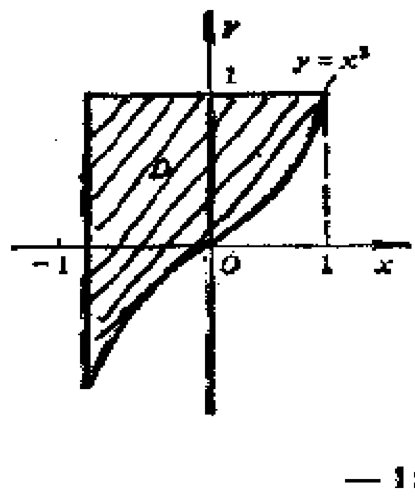
〔解〕（1）$D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\leqslant 2\}$

D既对称于x轴，又对称于y轴，被积函数$f(x,y)=|x|+|y|$是x,y的偶函数，故

$$\iint\limits_D(|x|+|y|)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint\limits_{D_1}(|x|+|y|)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=4\iint\limits_{D_1}(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{2-x}(x+y)\,\mathrm{d}y=\frac{32}{3}$$





（2）$D=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,\ x^3\leqslant y\leqslant 1\}$

令 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，则

$$
\begin{aligned}
&\iint_D x[1+yf(x^2+y^2)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D xyf(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_{-1}^{1}x\,\mathrm{d}x\int_{x^3}^{1}\mathrm{d}y+\int_{-1}^{1}x\,\mathrm{d}x\int_{x^3}^{1}yf(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\\
&=\int_{-1}^{1}x(1-x^3)\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}x\,\mathrm{d}x\int_{x^3}^{1}\frac{1}{2}f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}(x^2+y^2)\\
&=-\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x[F(x^2+y^2)]_{x^3}^{1}\,\mathrm{d}x\\
&=-\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x[F(1+x^2)-F(x^2+x^6)]\,\mathrm{d}x=0、
\end{aligned}
$$

因为 $x[F(1+x^2)-F(x^2+x^6)]$ 是 $[-1,1]$ 上的奇函数，所以

$$\iint_D x[1+yf(x^2+y^2)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{2}{5}.$$

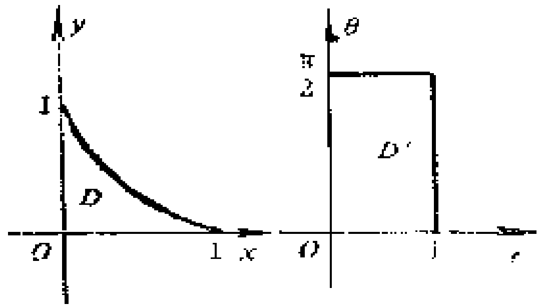
例 5 计算下列二重积分。

（1）$\iint_D(\sqrt{x}+\sqrt{y})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 由曲线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ 和坐标轴围成；

（2）$\iint_D(x+y)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\quad D$：$|x|+|y|\leqslant 1$　$\begin{cases}-1\leqslant x+y\leqslant 1\\ -1\leqslant x-y\leqslant 1\end{cases}$

［解］（1）本例被积函数和围成 D 的曲线都含有根号，去掉根号会使问题简单，故令 $x=r\cos^4\theta$，$y=r\sin^4\theta$，则 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{r}$，而曲线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ 化为 $o\text{-}r\theta$ 平面上直线

$\sqrt{r}=1$(即$r=1$)直线$y=0$化为$\theta=0$，直线$x=0$化为$\theta=\frac{\pi}{2}$，且



$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r}\\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{vmatrix}$$

$$=4r\sin^3\theta\cos^3\theta$$

$$\iint\limits_{D}(\sqrt{x}+\sqrt{y})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'}\sqrt{r}\,|J|\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$=\iint\limits_{D'}\sqrt{r}\,4r\sin^3\theta\cos^3\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{8}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta(1-\sin^2\theta)\,\mathrm{d}(\sin\theta)$$

$$=\frac{8}{5}\left[\frac{1}{4}\sin^4\theta-\frac{1}{6}\sin^6\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{8}{5}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)=\frac{2}{15}$$

（2） 作变换

$$x+y=u,\quad -1\leqslant u\leqslant 1;\quad x-y=v,\quad -1\leqslant v\leqslant 1$$

即
$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}(u+v)\\ y=\frac{1}{2}(u-v)\end{cases}\qquad J=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$$

故
$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}(x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\substack{-1\leqslant u\leqslant 1\\ -1\leqslant v\leqslant 1}}|J|\,u^2\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}v\int_{-1}^{1}u^2\mathrm{d}u=\frac{2}{3}$$

例6 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，试研究

$$\int_a^b dx \int_a^b [f(x)-f(y)]^2 dy$$

从而证明不等式

$$\left[\int_a^b f(x)\,dx\right]^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\,dx$$

此处等号仅当$f(x)$为常数时才成立。

〔证〕 $\int_a^b dx \int_a^b [f(x)-f(y)]^2 dy$

$$= \int_a^b dx \int_a^b [f^2(x) - 2f(x)f(y) + f^2(y)]dy$$

$$= \int_a^b \left[\int_a^b f^2(x)\,dy\right] dx - 2\int_a^b f(x)\,dx \int_a^b f(y)\,dy$$

$$+ \int_a^b \left[\int_a^b f^2(y)\,dy\right] dx = (b-a)\int_a^b f^2(x)\,dx$$

$$-2\left[\int_a^b f(x)\,dx\right]^2 + (b-a)\int_a^b f^2(y)\,dy$$

$$= 2\left\{(b-a)\cdot\int_a^b f^2(x)\,dx - \left[\int_a^b f(x)\,dx\right]^2\right\} \quad (1)$$

当且仅当$f(x)\equiv f(y)$，即$f(x)$为常数时，

$$\int_a^b dx \int_a^b [f(x)-f(y)]^2 dx = 0$$

由(1)得

$$(b-a)\int_a^b f^2(x)\,dx = \left[\int_a^b f(x)\,dx\right]^2$$

若$f(x)$不恒为常数，则

$$\int_a^b dx \int_a^b [f(x)-f(y)]^2 dy > 0$$

由(1)得

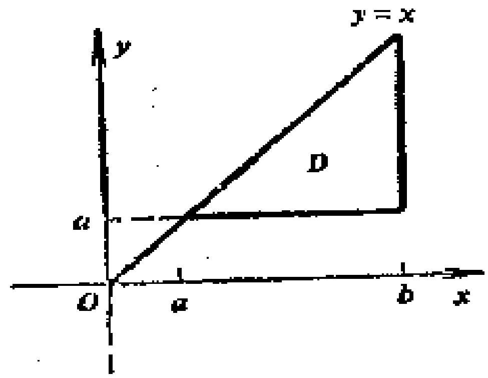
$$(b-a)\int_a^b f^2(x)\,dx > \left[\int_a^b f(x)\,dx\right]^2$$

故
$$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$$

例 7 证明
$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_a^x (x-y)^{n-2}f(y)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{n-1}\int_a^b (b-y)^{n-1}f(y)\mathrm{d}y$$

其中n为大于1的自然数。

［证］ 交换积分次序，



$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_a^x (x-y)^{n-2}f(y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_a^b \mathrm{d}y\int_y^b (x-y)^{n-2}f(y)\mathrm{d}x$$
$$=\int_a^b\left[f(y)\frac{1}{n-1}(x-y)^{n-1}\right]_y^b\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{n-1}\int_a^b (b-y)^{n-1}f(y)\mathrm{d}y$$

例 8 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，且 $f(x)>0$，试利用二重积分证明：
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x>(b-a)^2$$

［证］ $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(y)}\mathrm{d}y$

$$=\iint\limits_D\frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\frac{f(y)}{f(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D\left[\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D\frac{f^2(x)+f^2(y)}{f(x)f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

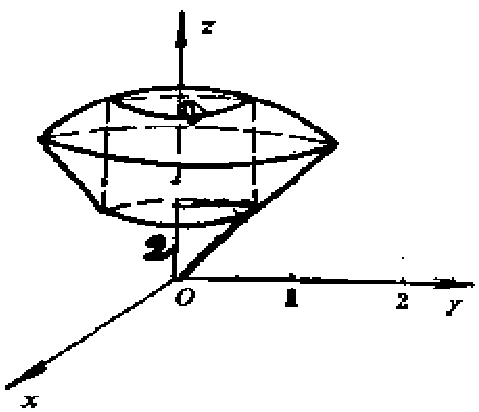
$$\geqslant \frac{1}{2}\iint_D \frac{2f(x)f(y)}{f(x)f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = (b-a)^2$$

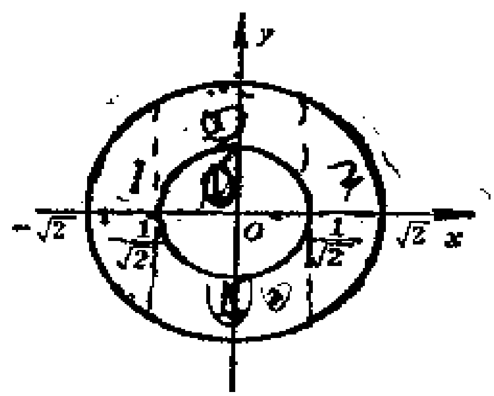
式中 $\qquad D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,\ a\leqslant y\leqslant b\}$

故 $\qquad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant (b-a)^2$

例 9 设$I=\iiint_\Omega z(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$是由$z\geqslant\sqrt{x^2+y^2}$及$1\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 4$所围成的立体。试将三重积分$I$分别在直角坐标系、柱面坐标系及球面坐标系下化成累次积分，并任取一种计算I。

［解］（1）在直角坐标系下化成累次积分：Ω(如下图)





$$\Omega=\left\{(x,y,z)\;\middle|\;-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant x\leqslant \frac{1}{\sqrt{2}},\ -\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{\frac{1}{2}-x^2},\ \sqrt{1-x^2-y^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{4-x^2-y^2}\right\}$$

$$+\left\{(x,y,z)\ \middle|\ -\sqrt{2}\leqslant x\leqslant -\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\sqrt{2-x^2}\leqslant y\leqslant \sqrt{2-x^2},\ \sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{4-x^2-y^2}\right\}$$

$$+\left\{(x,y,z)\ \middle|\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant x\leqslant \frac{1}{\sqrt{2}},\ -\sqrt{2-x^2}\leqslant y\leqslant -\sqrt{\frac{1}{2}-x^2},\ \sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{4-x^2-y^2}\right\}$$

$$+\left\{(x,y,z)\ \middle|\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant x\leqslant \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{\frac{1}{2}-x^2}\leqslant y\leqslant \sqrt{2-x^2},\ \sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{4-x^2-y^2}\right\}$$

$$+\left\{(x,y,z)\ \middle|\ \frac{1}{\sqrt{2}}<x<\sqrt{2},\ -\sqrt{2-x^2}\leqslant y\leqslant \sqrt{2-x^2},\ \sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{4-x^2-y^2}\right\}$$

故 $$I=\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}dx\int_{-\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}}^{\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}}dy\int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}}z(x^2+y^2)dz$$

$$+\int_{-\sqrt{2}}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}dx\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}}z(x^2+y^2)dy$$

$$+\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}dx\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{-\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}}z(x^2+y^2)dz$$

$$+\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}dx\int_{\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}}z(x^2+y^2)dz$$

$$+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}}z(x^2+y^2)\mathrm{d}z$$

（2）在柱面坐标系下化为累次积分：

$\Omega=\{(r,\theta,z)\mid 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ \ 0\leqslant r\leqslant 1/\sqrt{2},\ \sqrt{1-r^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{4-r^2}\}+\{(r,\theta,z)\mid 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 1/\sqrt{2}\leqslant r\leqslant\sqrt{2},\ r\leqslant z\leqslant\sqrt{4-r^2}\}$

$$\therefore I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}r^3\mathrm{d}r\int_{\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}}z\mathrm{d}z+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}}r^3\mathrm{d}r\int_r^{\sqrt{4-r^2}}z\mathrm{d}z$$

（3）在球面坐标系下化为累次积分：

$$\Omega=\left\{(r,\theta,\varphi)\ \middle|\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ \ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4},1\leqslant r\leqslant 2\right\}$$

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\sin^3\varphi\mathrm{d}\varphi\int_1^2 r^5\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\cdot\frac{r^6}{6}\Big|_1^2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\varphi\mathrm{d}(\sin\varphi)$$

$$=\frac{63}{3}\pi\left[\frac{1}{4}\sin^4\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{21}{16}\pi$$

例10 计算$I=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 4}e^{|z|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

［解法1］ 由于被积函数只与z有关，积分区域为球体$x^2+y^2+z^2\leqslant 4$，故可先计算二重积分，后单积分的方法。

$$I=\int_{-2}^2 e^{|z|}\mathrm{d}z\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-2}^2 e^{|z|}\pi(4-z^2)\mathrm{d}z$$

因为 $x^2+y^2=4-z^2$

所以 $I=2\pi\int_0^2 e^z(4-z^2)\mathrm{d}z=4\pi(e^2-1)$，

[解法 2]　被积函数$e^{|z|}$关于xoy面对称积分区域$x^2+y^2+z^2\leqslant 4$也关于xoy面对称，采用球坐标系计算，并利用对称性

$$I=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{r\cos\varphi}\underbrace{\sin\varphi d\varphi}_{-d\cos\varphi}\int_0^2 r^2 dr$$

$$=4\pi\int_0^2\left(-e^{r\cos\varphi}\right)_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot r dr=4\pi\int_0^2(e^r-1)r dr$$

$$=4\pi(e^2-1)$$

例11　计算

$$I=\int_{-1}^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_1^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dz$$

[解]　本例按原积分计算，积分困难，改用球面坐标系，积分区域

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2},$$
$$1\leqslant z\leqslant 1+\sqrt{1-x^2-y^2}\ \}$$
$$=\left\{(r,\varphi,\theta)\mid 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4},\quad \frac{1}{\cos\varphi}\leqslant r\leqslant 2\cos\varphi\right\}$$

故　$$I=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{2\cos\varphi}r^2 dr$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\sin\varphi\left[4\cos^2\varphi-\frac{1}{\cos^2\varphi}\right]d\varphi$$

$$=\frac{2}{3}\pi\left(1-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)-\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}d\varphi$$

$$=\frac{2}{3}\pi\left(1-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)-\frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1)$$

例12 计算$I=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$为椭球体

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1.$$

［解法］ 采用三重积分换元法。令

$$x=ar\sin\varphi\cos\theta,\quad y=br\sin\varphi\sin\theta,\quad z=cr\cos\varphi$$

则
$$J=\begin{array}{c}\left|\begin{matrix} a\sin\varphi\cos\theta & b\sin\varphi\sin\theta & c\cos\varphi \\ -ar\sin\varphi\sin\theta & br\sin\varphi\cos\theta & 0 \\ ar\cos\varphi\cos\theta & br\cos\varphi\cos\theta & -cr\sin\varphi \end{matrix}\right|\end{array}\begin{array}{c} r \\ \theta \\ \varphi \end{array}$$
$$=-abcr^2\sin\varphi$$

故 $I=abc\iiint\limits_{\Omega'}r^4\sin\varphi\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\mathrm{d}r$

$$=\frac{4}{5}\pi abc$$

其中 $\Omega'=\{(r,\varphi,\theta)\,|\,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi,\ 0\leqslant r\leqslant 1\}$

［解法 2］ 先进行一次二重积分，再作一次定积分。

$$I=\frac{1}{a^2}\iiint\limits_{\Omega}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{1}{b^2}\iiint\limits_{\Omega}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$+\frac{1}{c^2}\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=I_1+I_2+I_3$$

先计算I_1，任取$x\in[-a,a]$，用平面 $X=x$ 与椭球体Ω相截，得截面在yoz面上的投影区域为

$$D_x=\left\{(y,z)\,\middle|\,\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1-\frac{x^2}{a^2}\right\}$$

于是 $$I_1=\frac{1}{a^2}\int_{-a}^{a}x^2\mathrm{d}x\iint\limits_{D_x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{a^2}\int_{-a}^{a} x^2\, \frac{\pi bc}{a^2}(a^2-x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{4}{15}\pi abc$$

$\left(\text{因为}\quad \iint\limits_{D_x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=D_x\text{的面积}=\frac{\pi bc}{a^2}(a^2-x^2)\right)$

同理可得 $I_2=I_3=\frac{4}{15}\pi abc$，故

$$I=\frac{4}{5}\pi abc$$

例13 设函数具有连续的导数，求

$$I=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\pi t^4}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

[解] 由于积分区域为空间球，采用球坐标系，化为单积分。

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^t f(r)r^2\mathrm{d}r$$

$$=2\pi[-\cos\varphi]_0^{\pi}\cdot\int_0^t r^2f(r)\,\mathrm{d}r=4\pi\int_0^t r^2f(r)\,\mathrm{d}r$$

于是 $I=\lim\limits_{t\to 0}\frac{4\pi}{\pi t^4}\int_0^t r^2f(r)\,\mathrm{d}r=\lim\limits_{t\to 0}\frac{4t^2f(t)}{4t^3}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}$

$$=\begin{cases} f'(0), & \text{若} f(0)=0 \\ \infty, & \text{若} f(0)\neq 0\end{cases}$$ (罗比达法则)

例14 设函数$f(x)$在$(0,1)$内连续，试证明

$$\int_0^1\int_x^1\int_x^y f(x)f(y)f(z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{3!}\left[\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right]^3$$

【解】 令 $F(u)=\int_0^u f(t)\mathrm{d}t$，则 $F'(u)=f(u)$．于是

$$\frac{1}{3!}\left[\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right]^3=\frac{1}{3!}[F(1)-F(0)]^3=\frac{1}{3!}[F(1)]^3$$

而 $\int_0^1\int_x^1\int_x^y f(x)f(y)f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_x^1 f(y)[F(y)-F(x)]\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 f(x)\left[\int_x^1 f(y)F(y)\mathrm{d}y-\int_x^1 f(y)F(x)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 f(x)\left[\int_x^1 F(y)\mathrm{d}F(y)-F(x)F(y)\Big|_x^1\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 f(x)\left[\frac{1}{2}F^2(y)\Big|_x^1-F(x)(F(1)-F(x))\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 f(x)\left[\frac{1}{2}F^2(1)-\frac{1}{2}F^2(x)-F(x)F(1)+F^2(x)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)[F(1)-F(x)]^2\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1[F(1)-F(x)]^2\mathrm{d}[F(x)-F(1)]$$

$$=-\frac{1}{6}[F(1)-F(x)]^3\Big|_0^1=\frac{1}{6}[F(1)]^3=\frac{1}{3!}[F(1)]^3,$$

故 $$\int_0^1\int_x^1\int_x^y f(x)f(y)f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{3!}\left[\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right]^3.$$

自我测试题

1． 将二重积分 $I=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 按两种次序化为二次积

分，其中D为环域$a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2(0<a<b)$。

2. 计算$\int_1^2 \mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^x \sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y+\int_2^4 \mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^2 \sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y$。

3. 变更下列二次积分次序

$$\int_0^2 \mathrm{d}x\int_0^{\frac{x^2}{2}} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_2^{2\sqrt{2}} \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{8-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$$

4. 计算$\iint\limits_D\left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$由坐标轴与曲线$\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$所围成。

5. 计算下列三重积分。

（1）$\iiint\limits_\Omega z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$\Omega$是$x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$，$x^2+y^2+(z-a)^2\leqslant a^2$的公共部分；

（2）$\iiint\limits_\Omega z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$\Omega$由$x^2+y^2+z^2=1$与$z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$围成的空间区域。

6. 证明：当自然数m，n中至少有一个为奇数时，

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^m y^n\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

7. 证明

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pi\int_{-1}^1(1-u^2)f(u)\mathrm{d}u$$

8. 证明

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_a^x f(x,y)\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}y\int_y^b f(x,y)\mathrm{d}x\quad(a<b)$$

其中 f 为连续函数

9． 设 $f(t)$ 为连续函数，$F(t)=\iiint\limits_{\Omega}[z^2+f(x^2+y^2)]$

$\cdot dV$，Ω为：$0\leqslant z\leqslant h$　$x^2-y^2\leqslant t^2$，求$\dfrac{dF}{dt}$和 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{F(t)}{t^2}$。

提 示 与 答 案

1． $\int_{-b}^{-a}dx\int_{-\sqrt{b^2-x^2}}^{\sqrt{b^2-x^2}}f(x,y)dy+\int_{-a}^{a}dx\left[\int_{-\sqrt{b^2-x^2}}^{-\sqrt{a^2-x^2}}f(x,y)\right.$

$\left.\times dy+\int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{b^2-x^2}}f(x,y)dy\right]+\int_{a}^{b}dx\int_{-\sqrt{b^2-x^2}}^{\sqrt{b^2-x^2}}f(x,y)dy$

2． $4\pi^{-3}(\pi+2)$

3． $\int_{0}^{2}dy\int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}}f(x,y)dx$

4． 作变换 $x=ar^2\cos^4\theta$，$y=br^2\sin^4\theta$，$J=8abr^3\sin^3\theta$

$\times\cos^3\theta$ $\dfrac{2}{21}ab$。

5． （1） $\dfrac{59}{480}\pi a^5$；

（2） $\dfrac{\pi}{20}$。

6． 利用奇偶函数在对称区间上积分等于0。

7． 采用柱面坐标系，先计算对 x，y 的二重积分，再对 z 积分

8. 改变积分次序。

9. $F'(t) = 2\pi h t\left[\frac{h^2}{3} + f(t^2)\right]$,

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{t^2} = \pi h\left[\frac{h^2}{3} + f(0)\right]$$

解 $F(t) = \pi h\left[\frac{h^2}{3}t^2 + f(t^2)\right]$

§3.4 曲线积分与曲面积分

一、两类曲线积分概念及计算法

1. 对弧长曲线积分

定义： $\int_L f(x,y)\,ds = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$

重要性质：$\int_{-L} f(x,y)\,ds = \int_L f(x,y)\,ds$；若 $f(x,y)$ 在 L 上连续则可积。

计算法（化为定积分）：

（1）若 L：$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$，则

$$\int_L f(x,y)\,ds = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$$

（2）若 L：$y=y(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$，则

$$\int_L f(x,y)\,ds = \int_a^b f[x,\ y(x)]\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$$

（3）若 L：$r=r(\theta)$ $(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$ 极方程，则

$$\int_L f(x,\ y)\,ds = \int_\alpha^\beta f(r\cos\theta, r\sin\theta)\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta$$

（4）若空间曲线 L：$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\chi(t) \end{cases}$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$，则

$$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t),\chi(t)]\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2}\,\mathrm{d}t$$

2. 对坐标曲线积分

定义：$\int_L f(x,y)\cdot\mathrm{d}s=\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i]$$

重要性质：$\int_{-L}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=-\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$

若P，Q在L上连续，则积分存在。

计算法(化为定积分)：

（1）$L=\widehat{AB}\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，$A$点$(t=\alpha)$，$B$点$(t=\beta)$，

则 $$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t$$

（2）$L=\widehat{AB}$：$y=y(x)$，A点$(x=a)$，B点$(x=b)$，则

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_a^\beta\{P[x,y(x)]+Q[x,y(x)]y'(x)\}\mathrm{d}x$$

（3）$L=\widehat{AB}$（空间曲线）$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\chi(t) \end{cases}$ A点$(t=\alpha)$，B点$(t=\beta)$，则

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\{P[\varphi(t),\psi(t),\chi(t)]\varphi'(t)+Q\psi'(t)+R\chi'(t)\}\mathrm{d}t$$

两类曲线积分之关系：

$$\int_{L}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{L}[P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\sin\alpha]\mathrm{d}s$$

其中$\cos\alpha$为平面曲线L的方向余弦。

$$\int_{L}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_{L}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}s$$

其中$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$为空间曲线L的方向余弦。

二、格林(Green)公式、平面曲线积分与路径无关的条件

1. 格林公式

设闭区域D由分段光滑的曲线L围成，函数$P(x,y)$，$Q(x,y)$具有一阶连续偏导数，则有格林公式

$$\oint_{L}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

这里L是D的取正向的边界曲线。

2. 曲线积分与路径无关的条件

设D是一个单连区域，P、Q在D内具有一阶连续偏导数，则下列四个条件是等价的

（1）在D内$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$；

（2）L为D内任何一条封闭曲线$\oint_{L}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$。

（3）L_1,L_2为D内任意两条以$A(x_0,y_0)$为起点，$B(x_1,$

y_1)为终点的两条曲线，($A,B\in D$)，且

$$\int_{L_1} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{L_2} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

（4） $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在D内为某一函数$u(x,y)$的全微分，即$\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$，则

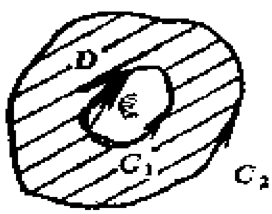
$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)\mathrm{d}y+C$$

$$=\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\mathrm{d}y+\int_{x_0}^{x} P(x,y)\mathrm{d}x+C,$$

$$(x_0,y_0)\in D$$

3. 推论

若$P(x,y)$、$Q(x,y)$、$\dfrac{\partial P}{\partial y}$、$\dfrac{\partial Q}{\partial x}$在多连域$D$及其边界



$C=C_1+C_2$上连续，在D上$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，则

$$\oint_{C_1} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\oint_{C_2} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y,$$

(C_1, C_2方向如图)

三、两类曲面积分概念与计算法

1. 对面积的曲面积分

定义： $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\underset{\smile}{\mathrm{d}s}=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$

重要性质：$\iint\limits_{-\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s=\iint\limits_{+\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}s$

若$f(x,y,z)$在Σ上连续则可积。

计算法(化为二重积分)：

(1) 若Σ: $\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v) \end{cases}$ $(u,v)\in D$，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s=\iint_{D} f[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]$$

$$\times\sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

(2) 若Σ: $z=z(x,y)$ $(x,y)\in D$，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s=\iint_{D} f(x,y,z(x,y))$$

$$\times\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

2. 对坐标的曲面积分

定义：$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta s_i)_{xy}$

重要性质：$\iint_{-\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

若$R(x,y,z)$在Σ上连续则可积。

计算法(化为二重积分)：

(1) 有向曲面Σ $\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v), \\ z=z(u,v) \end{cases}$ $(u,v)\in D$，则

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint_{D} R[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]$$

$$\times\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

(若D的正向对应于Σ所选一侧相应的正向，取正号，否则取负号.)

(2) 有向曲面Σ：$z=z(x,y)$，$(x,y)\in D$，则

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint\limits_{D} R[x,y,z(x,y)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(上侧取正号，下侧取负号)

[注] 同样可考虑$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x$.

两类曲面积分之间的关系：

$$\iint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}[P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma]\,\mathrm{d}s$$

其中$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$为有向曲面Σ正侧法线的方向余弦。

四、高斯(Gauss)公式与斯托克斯(stokes)公式

高斯公式：设空间闭区域Ω是由分片光滑的曲面Σ围成，$P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$在Ω上具有一阶连续偏导数，则

$$\oiint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

斯托克斯公式：设Γ为分段光滑的空间有向闭曲线，Σ是以Γ为边界的分片光滑的有向曲面，$\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$为曲面正侧上的单位法向量，函数$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，

$R(x,y,z)$ 在包含曲面Σ在内的一个空间域具有一阶连续偏导数，则

$$\oint_{\Gamma} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\overset{\text{记}}{=}\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

设空间开区域G是单连通域，函数$P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$在G内具有一阶连续偏导数，则下列四个条件是等价的。

（1）在G内$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，$\dfrac{\partial Q}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial y}$，$\dfrac{\partial R}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial z}$，

（2）Γ为G内任何一条封闭空间曲线，

$$\oint_{\Gamma} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=0$$

（3）Γ_1，Γ_2为G内任意两条以$A(x_0,y_0,z_0)$为起点，$B(x_1,y_1,z_1)$为终点的曲线，$(A,B\in G)$则

$$\int_{\Gamma_1} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_{\Gamma_2} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

（4）$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$在$G$内为某一函数$u(x,y,z)$的全微分，即$\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$，且

$$u(x,y,z)=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

$$=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0,z_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y} Q(x,y,z_0)\mathrm{d}y$$

$$+\int_{z_0}^{z} R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

其他五种路线的积分公式不再陈述。

五、解题示例

1． 弧长曲线积分

计算一般按以下步骤进行。

（1）确定曲线 L 的方程所对应变量的范围；

（2）按曲线所给方程的类型和相应的计算公式化为定积分；

（3）定出上、下限（下限一定小于上限），并算出结果。

例 1 计算曲线积分 $\int_L y\mathrm{d}s$，L 是摆线，$x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ 的一拱 $(a>0)$。

［解］ $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a(1-\cos t)$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=a\sin t$，$\mathrm{d}s=\sqrt{2}a\times\sqrt{1-\cos t}\,\mathrm{d}t$ 于是

$$\int_L y\mathrm{d}s=\sqrt{2}a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{2}a^2\int_0^{2\pi}2^{\frac{3}{2}}\left(\sin^2\frac{t}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t=4a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\mathrm{d}t$$

$$=-8a^2\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}\left(\cos\frac{t}{2}\right)$$

$$=-8a^2\left[\cos\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}=\frac{32}{3}a^2$$

例 2 计算曲线积分 $\oint_L\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s$，$L$ 为圆 x^2+y^2-

$ax=0\ (a>0)$。

［解］ L：$x^2+y^2-ax=0$ 的极坐标方程为

$$r=a\cos\theta,\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$$

$$ds=\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta$$

于是 $$\oint_L\sqrt{x^2+y^2}\,ds=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}r\sqrt{a^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a^2\cos\theta\,d\theta=2a^2$$

例 3 计算曲线积分$\int_\Gamma(x^2+y^2+z^2)\,ds$，其中 Γ 是

（1）螺旋线 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=bt\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$；

（2）球面 $x^2+y^2+z^2=\dfrac{9}{2}$与平面 $x+z=1$ 的交线。

［解］（1）由螺旋线的参数方程，有

$$ds=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}\,dt$$
$$=\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+b^2}\,dt$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\,dt$$

故 $$\int_L(x^2+y^2+z^2)\,ds=\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2t+a^2\sin^2t+b^2t^2)$$

$$\times\sqrt{a^2+b^2}\,dt=\frac{2\pi}{3}(3a^2+4\pi^2b^2)\sqrt{a^2+b^2}$$

（2）曲线 Γ 的方程为

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=\dfrac{9}{2}\\ x+z=1\end{cases}$$

法 1：以 x 作参数，则 Γ 的参数方程为

$$
\begin{cases}
x = x \\
y = \pm\sqrt{2}\sqrt{2-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2}, \quad -\sqrt{2}+\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}+\dfrac{1}{2} \\
z = 1-x
\end{cases}
$$

于是 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1-2x}{y}, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -1$$

故 $$\mathrm{d}s = \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2}}\mathrm{d}x$$

由于用 $-y$ 代替 y 时，被积函数与曲线 Γ 的方程都不变，因此得到

$$\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s = 2\int_{-\sqrt{2}+\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}+\frac{1}{2}} \frac{9}{2} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2}}\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_{-\sqrt{2}+\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}+\frac{1}{2}} \frac{9}{2} \frac{2}{\sqrt{4-2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2}}\,\mathrm{d}\left[\sqrt{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right] = 18\pi$$

法 2：由于曲线 Γ 的方程可表示为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2}{2}+\dfrac{y^2}{4} = 1 & (1) \\
z+x = 1 & (2)
\end{cases}
$$

引入广义极坐标：$x-\dfrac{1}{2} = \sqrt{2}\cos\theta$，$y = 2\sin\theta$。(1)式化为 $r=1$ 从而得曲线 Γ 的参数方程为

$$\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos\theta+\dfrac{1}{2} \\ y=2\sin\theta \\ z=\dfrac{1}{2}-\sqrt{2}\cos\theta \end{cases} \qquad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$

$$ds=\sqrt{(-\sqrt{2}\sin\theta)^2+(2\cos\theta)^2+(\sqrt{2}\sin\theta)^2}\,d\theta=2d\theta$$

于是 $$\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\,ds=\int_0^{2\pi}\frac{9}{2}\cdot 2d\theta=18\pi$$

法 3： 曲线Γ是球面 $x^2+y^2+z^2=\dfrac{9}{2}$被平面 $x+z=1$所割出的半径为 2 的圆周，从而它的周长为 4π，于是

$$\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\,ds=\frac{9}{2}\int_\Gamma ds=\frac{9}{2}\cdot 4\pi=18\pi$$

2. 坐标曲线积分

计算一般按以下步骤进行。

（1）确定曲线 L 的方程所对应的变量范围

（2）按曲线 L 所给方程类型和相应的计算公式化为定积分；

（3）确定起点和终点所对应的参数α、β（α 不一定比β小），并算出结果。

例 4 计算曲线积分$I=\int_L x\,dx+y\,dy+(x+y-1)\,dz$，$L$ 是由点(1,1,1)至点(2,3,4)的直线段。

［解］ L 的方程为$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}\ (=t)$，则

$$x=1+t \quad y=1+2t \quad z=1+3t \ (0\leqslant t\leqslant 1)$$

于是 $I=\int_0^1[(1+t)+2(1+2t)+(1+t+1+2t-1)3]dt$

$$=\int_0^1(6+14t)\,dt=13$$

例 5 计算$\int_L(x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy$，其中$L$为曲线$y=1-|1-x|\ (0\leqslant x\leqslant 2)$。

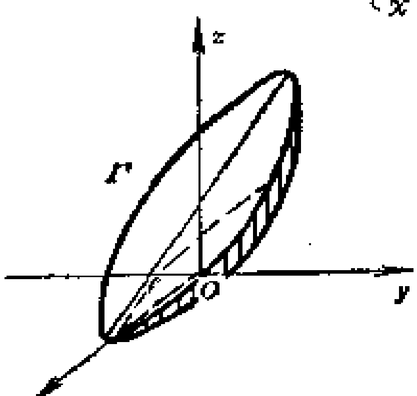
[解] $$y=1-|1-x|=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

于是 $$\int_L(x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy=\int_0^1(x^2+x^2)\,dx$$

$$+\int_1^2[x^2+(2-x)^2]\,dx+\int_1^2[x^2-(2-x)^2](-dx)$$

$$=\frac{2x^3}{3}\Big|_0^1+2\int_1^2(2-x)^2\,dx=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

例 6 计算曲线积分$\int_\Gamma(y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\times dz$。其中$\Gamma$为椭圆：$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ x+z=1\end{cases}$，从$x$轴正向看去，$\Gamma$的方向是顺时针的。



[解] 空间曲线Γ如左图，其参数方程为：$x=\cos\theta, y=\sin\theta, z=1-\cos\theta$，$\theta$为$\Gamma$上点$(x,y,z)$，在$xoy$面上的投影$P(x,y,0)$的矢径$\overrightarrow{OP}$与$x$轴正向的夹角，且从$2\pi$到0。于是

$$\int_\Gamma(y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz$$

$$=\int_{2\pi}^{0}[(\sin\theta-1+\cos\theta)(-\sin\theta)+(1-\cos\theta-\cos\theta)\cos\theta+(\cos\theta-\sin\theta)\sin\theta]\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{2\pi}^{0}(\sin\theta+\cos\theta-2)\,\mathrm{d}\theta=-2\theta\Big|_{2\pi}^{0}=4\pi$$

$\left(因为\int_{2\pi}^{0}(\sin\theta+\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta=0\right)$

例 7 设$P(x,y)$，$Q(x,y)$在曲线L上连续，l为L的长度，$M=\max\limits_{(x,y)\in L}\sqrt{P^2(x,y)+Q^2(x,y)}$，证明

$$\left|\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right|\leqslant lM$$

再利用上面的不等式估计积分

$$I_R=\oint_{C_R}\frac{(y-1)\mathrm{d}x+(x+1)\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+2x-2y+2)^2}$$

其中C_R为圆周$(x+1)^2+(y-1)^2=R^2$的正向，并求$\lim\limits_{R\to+\infty}|I_R|$。

［解］ 应用两类曲线积分的关系式

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_L(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)\mathrm{d}s$$

其中$\cos\alpha$，$\sin\alpha$为L上一点(x,y)处切线的方向余弦。由曲线积分性质：

$$\left|\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right|\leqslant\int_L|P\cos\alpha+Q\sin\alpha|\mathrm{d}s$$

又 $$(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)^2=P^2\cos^2\alpha+Q^2\sin^2\alpha+2PQ\cos\alpha\sin\alpha$$

$$0\leqslant(P\sin\alpha-Q\cos\alpha)^2=P^2\sin^2\alpha+Q^2\cos^2\alpha-2PQ\cos\alpha\sin\alpha$$

即 $$2PQ\sin\alpha\cos\alpha\leqslant P^2\sin^2\alpha+Q^2\cos^2\alpha$$

于是 $(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)^2\leqslant P^2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$
$$+Q^2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=P^2+Q^2$$
从而 $\quad |P\cos\alpha+Q\sin\alpha|\leqslant\sqrt{P^2+Q^2}\leqslant M$

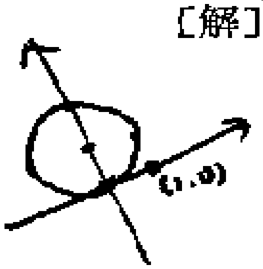
故 $\quad \left|\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right|\leqslant M\int_L \mathrm{d}s=Ml$

又在 I_R 中，
$$P^2+Q^2=\frac{(x+1)^2+(y-1)^2}{(x^2+y^2+2x-2y+2)^4}=\frac{R^2}{R^8}=\frac{1}{R^6}$$
即 $\frac{1}{R^3}=M$，故
$$|I_R|=\left|\oint_{C_R}\frac{(y-1)\mathrm{d}x+(x+1)\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+2x-2y+2)^2}\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{R^3}\cdot 2\pi R=\frac{2\pi}{R^2}$$
从而
$$\lim_{R\to+\infty}|I_R|\leqslant\lim_{R\to+\infty}\frac{2\pi}{R^2}=0$$
故 $\lim\limits_{R\to+\infty}|I_R|=0$

例 8 计算 $\oint_L\frac{y\mathrm{d}x-(x-1)\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2}$，其中（1）$L$ 为圆周 $x^2+y^2-2y=0$ 的正向；（2）L 为椭圆 $4x^2+y^2-8x=0$ 的正向。

单连通区域．格林[illegible]

〔解〕（1）L 为圆周 $x^2+(y-1)^2=1$，不包含点 $(1,0)$。



$$P=\frac{y}{(x-1)^2+y^2}\qquad Q=\frac{1-x}{(x-1)^2+y^2}$$
$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{(x-1)^2-y^2}{[(x-1)^2+y^2]^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

故

$$\oint_L \frac{y\,\mathrm{d}x-(x-1)\,\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$$

（2）L 为椭圆 $(x-1)^2+\frac{1}{4}y^2=1$ 包含点$(1,0)$，以$(1,0)$为圆心，半径为充分小正数 δ 作圆周C_δ，使C_δ 含于 L 内，并取C_δ 为顺时针方向，设D' 为L 与C_δ 所围区域，则由格林公式，得

$$\int_{L+C_\delta}\frac{y\,\mathrm{d}x-(x-1)\,\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2}=\iint_{D'}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$$

用C_δ^-表示与C_δ反向的圆周，并设 $x=1+\delta\cos\theta$，$y=\delta\sin\theta$，则

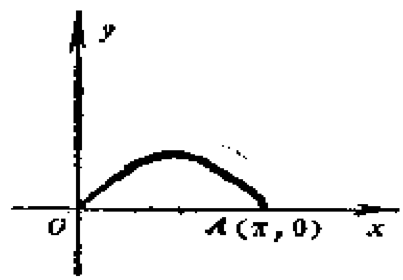
$$I=\int_L\frac{y\,\mathrm{d}x-(x-1)\,\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2}=-\int_{C_\delta}\frac{y\,\mathrm{d}x-(x-1)\,\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2}$$

$$=\int_{C_\delta^-}\frac{y\,\mathrm{d}x-(x-1)\,\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{-\delta^2\sin^2\theta-\delta^2\cos^2\theta}{\delta^2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$=-2\pi$$

例 9 计算曲线积分

$$I=\int_L\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x+y\left[xy+\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]\mathrm{d}y$$



其中L 是曲线 $y=\sin x$（$0\leqslant x\leqslant\pi$）按 x 增大方向。

［解］ 设法创造条件，应用格林公式，为此连接直线段$\overline{OA}$，则 $L^-+\overline{OA}$组成逆时针封闭曲线所围平面区域

$$D=\{(x,y)/0\leqslant x\leqslant\pi \quad 0\leqslant y\leqslant\sin x\}$$

于是$I=-\int_{L^-}\sqrt{x^2+y^2}\,dx+y[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]dy$

$$=-\left[\oint_{L^-+\overline{OA}}-\int_{\overline{OA}}\right]\sqrt{x^2+y^2}\,dx+y[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]dy$$

而 $P=\sqrt{x^2+y^2}\qquad Q=y[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\qquad\frac{\partial Q}{\partial x}=y^2+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

故 $I=-\iint\limits_D y^2\,dx\,dy+\int_{\overline{OA}}\sqrt{x^2+y^2}\,dx+y[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]dy$

$$=-\int_0^\pi dx\int_0^{\sin x}y^2dy+\int_0^\pi\sqrt{x^2}\,dx=-\frac{4}{9}+\frac{\pi^2}{2}$$

例10 确定参数λ的值，使得在不经过直线$y=0$的区域上，曲线积分$I=\int_L\frac{x(x^2+y^2)^\lambda}{y}dx-\frac{x^2(x^2+y^2)^\lambda}{y^2}dy$与路径无关，并求当$L$为从$A(1,1)$到$B(0,2)$时$I$的值。

［解］ $P=\frac{x(x^2+y^2)^\lambda}{y}\qquad Q=\frac{x^2(x^2+y^2)^\lambda}{y^2}$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{x}{y^2}(x^2+y^2)^{\lambda-1}(2\lambda y^2-x^2-y^2)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{2x(x^2+y^2)^{\lambda-1}}{y^2}(x^2+y^2+\lambda x^2)$$

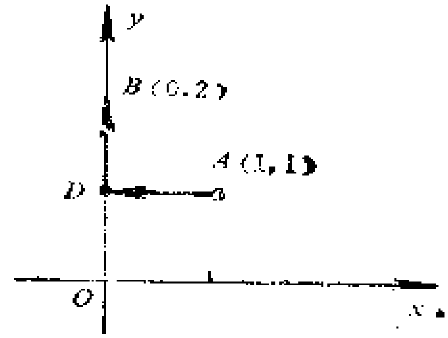
要使曲线积分I与路径无关，需$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，即

$$(2\lambda-1)y^2-x^2=-2(\lambda+1)x^2-2y^2$$

或 $$(2\lambda+1)y^2+(2\lambda+1)x^2=0$$

因 $y\neq0$，所以$\lambda=-\dfrac{1}{2}$.

当 L 为从 A (1,1) 到 B (0,2) 时，选路径 $\overline{AD}+DB$ (如右图)，



$$I=\int_1^0 x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\,dx+\int_1^2 0\,dy=1-\sqrt{2}$$

例11 证明：若$f(u)$为连续函数，且 L 为逐段光滑的闭曲线，则

$$\oint_L f(x^2+y^2)[x\,dx+y\,dy]=0$$

从以上诸例说明，一些看似无关紧要的条件将改变整个解题方法。特别留心。

［证］ 这里假定$f(u)$连续，并不可微，不能利用充要条件$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$. 但因$f(u)$连续，故可积，令 $F(u)=\dfrac{1}{2}\int_0^u f(t)\cdot dt$ 并令 $u=x^2+y^2$，则

凑出积分。

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=f(u)\cdot x=f(x^2+y^2)\cdot x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=f(u)\cdot y=f(x^2+y^2)\cdot y$$

故 $$dF=f(x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy)$$

由四个等价条件(4)可知

$$\oint_L f(x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy)=0$$

例12 已知 $f(0)=-1$，试确定可微函数 $f(x)$ 使曲线

积分$\int_{(0,0)}^{(1,1)}[\operatorname{tg}x-f(x)]\dfrac{y}{\cos^2 x}dx+f(x)dy$与路径无关，并求积分值。

[解] $P(x,y)=[\operatorname{tg}x-f(x)]\dfrac{y}{\cos^2 x}\quad Q(x,y)=f(x)$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=[\operatorname{tg}x-f(x)]\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{\partial Q}{\partial x}=f'(x)$$

即 $f'(x)=[\operatorname{tg}x-f(x)]\dfrac{1}{\cos^2 x}$，$\underline{f'(x)+\dfrac{f(x)}{\cos^2 x}=\dfrac{\operatorname{tg}x}{\cos^2 x}}$

这是一阶线性非齐次方程。于是

$$f(x)=\exp\left(-\int\frac{1}{\cos^2 x}dx\right)\left[\int\frac{\operatorname{tg}x}{\cos^2 x}\cdot\exp\left(\int\frac{1}{\cos^2 x}dx\right)dx\right.$$

$$\left.+c\right]=\operatorname{tg}x-1+c\exp(-\operatorname{tg}x)$$

因为$f(0)=-1$，$-1=-1+c$，$c=0$。故$f(x)=\operatorname{tg}x-1$，从而曲线积分

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}[\operatorname{tg}x-f(x)]\frac{y}{\cos^2 x}dx+f(x)dy$$

$$=\int_{(0,0)}^{(1,1)}\frac{y}{\cos^2 x}dx+(\operatorname{tg}x-1)dy$$

$$=\int_0^1 0dx+\int_0^1(\operatorname{tg}1-1)dy=\operatorname{tg}1-1$$

3. 对面积的曲面积分

计算一般按以下步骤进行。

(1)确定曲面Σ的方程及变量变化范围，即曲面Σ在某坐标面上投影区域，如果Σ用参数方程表示，确定参数变化范围；

(2)按曲面Σ所给方程的类型和相应的计算公式化为二

重积分；

（3）确定二重积分的积分限，并算出结果。

例13 计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}s$，其中$\Sigma$为上半球面$x^2+y^2+z^2=a^2 \quad (z\geqslant 0)$。

［解法1］ $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

$$D_{xy}=\{(x,y)/x^2+y^2\leqslant a^2\}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

于是 $$I=a\iint\limits_{D_{xy}}\left(x+y+\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

（采用极坐标）

$$=a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\left[\frac{r(\cos\theta+\sin\theta)}{\sqrt{a^2-r^2}}+1\right]r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta-a\int_0^{2\pi}(\sin\theta+\cos\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^a\frac{r^2}{\sqrt{a^2-r^2}}$$

$$\times\mathrm{d}r=\pi b^3-0=\pi a^3$$

［解法2］ 曲面Σ方程$x^2+y^2+z^2=a^2$用参数方程表示

$x=a\sin\varphi\cos\theta$， $y=a\sin\varphi\sin\theta$， $z=a\cos\varphi$， $\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}，0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\right)$

$$ds=\sqrt{\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\theta)}\right]^2+\left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right]^2+\left[\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right]^2}\,d\varphi d\theta$$
$$=a^2\sin\varphi d\varphi d\theta$$

于是 $$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}[a\sin\varphi\cos\theta+a\sin\varphi\sin\theta+a\cos\varphi]$$
$$\times a^2\sin\varphi d\varphi=\int_0^{2\pi}a^3\cos\theta d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi d\varphi$$
$$+\int_0^{2\pi}a^3\sin\theta d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi d\varphi$$
$$+a^3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi$$
$$=0+0+a^3(2\pi)\cdot\frac{1}{2}=\pi a^3$$

例14 计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)ds$，$\Sigma$是球面$x^2+y^2+z^2=a^2$，而
$$f(x,y,z)=\begin{cases}x^2+y^2, & 当z\geqslant\sqrt{x^2+y^2}\\ 0 , & 当z<\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}$$

［解］ 锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与上半球面$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$交于
$$\begin{cases}z=\frac{\sqrt{2}}{2}a\\ x^2+y^2=\frac{a^2}{2},\end{cases}\qquad z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

得 $$ds=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy=\frac{adxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$D_{xy}=\left\{(x,y)/x^2+y^2\leqslant\frac{a^2}{2}\right\}$$

于是 $I=\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\,\mathrm{d}s=\iint\limits_{\Sigma}(x^2-y^2)\,\mathrm{d}s$

Σ_1为上半球面夹在锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$间的曲面。

$$I=\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a}\frac{ar^2}{\sqrt{a^2-r^2}}r\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a}\frac{r^2}{2\sqrt{a^2-r^2}}\mathrm{d}(r^2)\quad=\frac{\pi a^4}{6}(8-5\sqrt{2})$$

例15 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}|xyz|\,\mathrm{d}s$，其中 Σ 为 $z=x^2+y^2\quad(0\leqslant z\leqslant1)$.

〔解〕 利用"对称性"可以简化计算，计算曲面积分也不例外。设曲面 $\Sigma z=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant1)$在第一卦限内部分为$\Sigma_1$：$z=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant1)$，$x\geqslant0$，$y\geqslant0$. Σ_1在 xoy 面上的投影区域为D_1：$x^2+y^2\leqslant1$，$x\geqslant0$，$y\geqslant0$，由于积分区域 Σ 与被积函数$|xyz|$均关于xoz和yoz坐标面对称，故有

$$\iint\limits_{\Sigma}|xyz|\,\mathrm{d}s=4\iint\limits_{\Sigma_1}|xyz|\,\mathrm{d}s$$

而 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，从而

$$\iint\limits_{\Sigma}|xyz|\,\mathrm{d}s$$

$$=4\iint_{\Sigma_1} xyz\mathrm{d}s=4\iint_{D_1} xy(x^2+y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^5\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r$$

$$=2\int_0^1 r^5\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r \xlongequal{\sqrt{1+4r^2}=u}$$

$$\times 2\int_1^{\sqrt{5}}\left(\frac{u^2-1}{4}\right)^2 u\cdot\frac{1}{4}\cdot u\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{32}\int_1^{\sqrt{5}}(u^2-1)^2u^2\mathrm{d}u=\frac{125\sqrt{5}-1}{420}$$

例16 计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma}\frac{1}{(1+x+y)^2}\mathrm{d}s$，$\Sigma$是四面体$x+y+z\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$的表面。

［解］ 在$x+y+z=1$上，$\frac{\partial z}{\partial x}=-1, \frac{\partial z}{\partial y}=-1$，故$\mathrm{d}s=\sqrt{3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；在$x=0$上，$\mathrm{d}s=\mathrm{d}y\mathrm{d}z$；在$z=0$上，$\mathrm{d}s=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；在$y=0$上，$\mathrm{d}s=\mathrm{d}z\mathrm{d}x$。于是

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{1}{(1+x+y)^2}\mathrm{d}s=(\sqrt{3}+1)\iint_{D_{xy}}\frac{1}{(1+x+y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+\iint_{D_{yz}}\frac{1}{(1+y)^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_{D_{xz}}\frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$D_{xy}=\{(x,y)/0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1-x\}$,

$D_{yz}=\{(y,z)/0\leqslant z\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1-z\}$

$D_{xz}=\{(x,z)/0\leqslant z\leqslant 1, 0\leqslant x\leqslant 1-z\}$

故 $I=(\sqrt{3}+1)\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{1}{(1+x+y)^2}\mathrm{d}y$

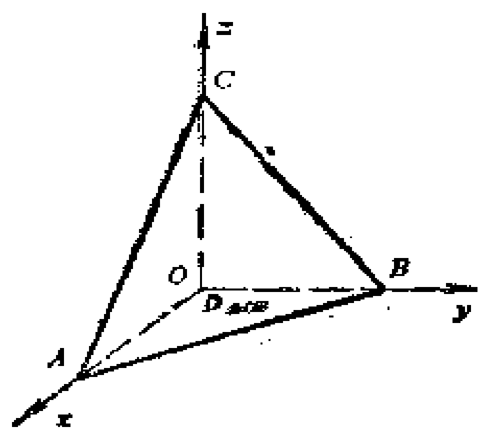
$$+\int_0^1 \mathrm{d}z\int_0^{1-z}\frac{1}{(1+y)^2}\mathrm{d}y+\int_0^1 \mathrm{d}z\int_0^{1-z}\frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-1)\ln 2$$

4． 对坐标的曲面积分

计算和对面积的曲面积分计算步骤类似，但在化为二重积分时，必须准确选取公式前的正负号。

例17 计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma} yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+zx\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是四面体$x+y+z\leqslant a\ (a>0)$ $x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$的外侧。



［解］ 将组合曲面积分三项分开，分别在各面上积分。

$$\iint\limits_{\Sigma} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{AOB\text{下侧}} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+\iint\limits_{BOC\text{后侧}} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+\iint\limits_{AOC\text{左侧}} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{ABC\text{上侧}} x\mathrm{d}xy\mathrm{d}y$$

$$=-\iint\limits_{D_{AOB}} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_{AOB}} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

D_{AOB}表示平面$x+y+z=a$在xoy坐标面上的投影域。同理可得

$$\iint\limits_{\Sigma} yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,\iint\limits_{\Sigma} zx\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0$$

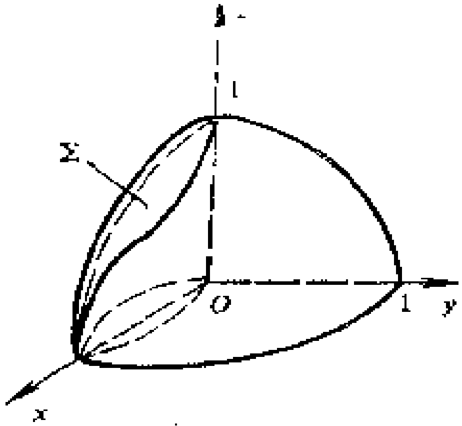
故 $$I=0$$

或由奥-高公式

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$

Ω 为四面体围成立体。

例18 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$



其中曲面 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$，界于 $x^2+y^2-x\leqslant0, z\geqslant0$ 内部分（外侧面）.

〔解〕 由

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\x^2+y^2-x=0\end{cases}\qquad(1)$$

消去 y 得曲面 Σ 在 xOz 坐标面 $(z\geqslant0)$ 的投影域为 xOz 面上曲线 $z=\sqrt{1-x}$。故

$$\iint\limits_{\Sigma}y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0$$

由(1)消去 x，得 $y=\pm z\sqrt{1-z^2}$.故

$$\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D_{yz}}(1-y^2-z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}z\int_{-z\sqrt{1-z^2}}^{z\sqrt{1-z^2}}(1-y^2-z^2)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\left[(1-z^2)y-\frac{1}{3}y^3\right]_{-z\sqrt{1-z^2}}^{z\sqrt{1-z^2}}\mathrm{d}z$$

$$=2\int_0^1\left[z(1-z^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}z^3(1-z^2)^{\frac{3}{2}}\right]\mathrm{d}z$$

而 $$\int_0^1 z(1-z^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\int_0^1-(1-z^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}(1-z^2)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}(1-z^2)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1=\frac{1}{5}$$

$$\int_0^1 z^3(1-z^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}z\xlongequal{\text{令}z=\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\cos^3 t\cos t\,\mathrm{d}t=\frac{2}{35}$$

于是 $$\iint_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{35}\right)=\frac{38}{105}$$

由(1)，Σ在xOy面的投影区域为

$$D_{xy}=\{(x,y)/x^2+y^2-x\leqslant 0\}$$

故 $$\iint_{\Sigma}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\quad\text{(采用极坐标系)}$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta}(1-r^2)r\mathrm{d}r=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^{\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\cos^2\theta}{2}-\frac{\cos^4\theta}{4}\right]\mathrm{d}\theta=\frac{5}{32}\pi$$

所以 $$I=\frac{38}{105}+\frac{5}{32}\pi$$

例19 计算曲面积分$I=\iint_{\Sigma}(x^3\cos\alpha+y^3\cos\beta+z^3\cos\gamma)\cdot\mathrm{d}s$，其中$\Sigma$为曲面$x^2+y^2=z^2(0\leqslant z\leqslant h)$的一部分，$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$为此曲面外法线的方向余弦。

[解] 设平面區域$\begin{cases}z=h\\x^2+y^2\leqslant h^2\end{cases}$的上侧为$\Sigma_1$，则得封闭曲面$\Sigma+\Sigma_1$的外侧，由奥-高公式

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} (x^3\cos\alpha + y^3\cos\beta + z^3\cos\gamma)\,\mathrm{d}s$$

$$= \oiint_{\Sigma_1+\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 3\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$ （Ω 是由 $x^2+y^2=z^2$ 与 $z=h$ 所围的区域）

$$= 3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{h}{\cos\varphi}} r^4\sin\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$= 6\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^{\frac{h}{\cos\varphi}}\mathrm{d}\varphi = \frac{6\pi}{5}h^5\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\varphi}{\cos^5\varphi}\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{9}{10}\pi h^5$$

而
$$\iint_{\Sigma_1}(x^3\cos\alpha + y^3\cos\beta + z^3\cos\gamma)\,\mathrm{d}s$$

$$= \iint_{x^2+y^2\leqslant h^2} h^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi h^5$$

故 $$I = \frac{9}{10}\pi h^5 - \pi h^5 = -\frac{1}{10}\pi h^5$$

例20 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} 2(1-x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 8xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x - 4xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是曲线 $x=e^y\ (0\leqslant y\leqslant a)$ 绕 x 轴旋转而成的旋转曲面的外侧。

［解］ 曲线 $x=e^y(0\leqslant y\leqslant a)$ 绕 x 轴旋转而成的旋转曲面 Σ 不是封闭曲面，为此加一个平面圆域 $\begin{cases} x=e^a \\ y^2+z^2\leqslant a^2\end{cases}$ 的右侧，

称为Σ_1，Σ与Σ_1所围立体为Ω。于是由奥-高公式

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} 2(1-x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+8xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint_{\Omega}0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$

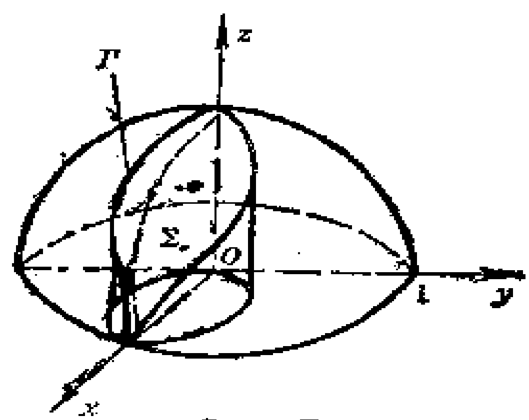
而
$$\iint_{\Sigma_1}2(1-x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+8xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{yz}}2(1-\mathrm{e}^{2a})\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2(1-\mathrm{e}^{2a})\iint_{y^2+z^2\leqslant a^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=2(1-\mathrm{e}^{2a})\pi a^2$$

故
$$I=-2(1-\mathrm{e}^{2a})\pi a^2=2(\mathrm{e}^{2a}-1)\pi a^2$$

例21 计算曲线积分$\oint_\Gamma y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z$，其中$\Gamma$为曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\x^2+y^2=x\end{cases}$ $(z\geqslant0)$，从x轴正向看去，指向为顺时针方向。



[解] $P=y^2\quad Q=z^2$

$R=x^2$

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=-2z\quad\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=-2x\quad\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-2y$$

选取曲面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧被Γ围成的那一部分为Σ，如图。由于曲线的方向与斯托克斯公式中要求方向相反，所以

在曲面积分前面加一个负号。

即 $$\oint_{\Gamma} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$$

$$= -\iint_{\Sigma} (-2z) dy dz + (-2x) dz dx + (-2y) dx dy$$

$$= 2\iint_{\Sigma} [z\cos\alpha + x\cos\beta + y\cos\gamma] ds$$

由于Σ关于坐标面 xOz 面($y=0$)对称，故$\iint_{\Sigma} x\cos\beta ds = 0$。又在$\Sigma$上

$$\cos\alpha = \frac{x}{1}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{1}$$

于是 $$z\cos\alpha = zx = xz = x\cos\gamma$$

设$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$所围的区域为$D$，故

$$\oint_{\Gamma} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz = 2\iint_{\Sigma} (x+y)\cos\gamma ds$$

$$= 2\iint_{D} (x+y) dx dy$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{0}^{\cos\theta} r(\cos\theta + \sin\theta) r dr$$ （D 为 Σ 在 xoy 面上投影）

$$= \frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta + \sin\theta)\cos^3\theta d\theta = \frac{4}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

例22 验证曲线积分$\int_{(-1,0,1)}^{(1,2,\frac{\pi}{3})} 2xe^{-y}dx+(\cos z-x^2e^{-y})$ $\cdot dy-y\sin zdz$与路径无关，并求其值。

［解］ $P=2xe^{-y}$ $Q=\cos z-x^2e^{-y}$， $R=-y\sin z$

$$\frac{\partial R}{\partial y}=-\sin z=\frac{\partial Q}{\partial z}，\frac{\partial P}{\partial z}=0=\frac{\partial R}{\partial x}，\frac{\partial Q}{\partial x}=-2xe^{-y}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

故曲线积分与路径无关。

取由点$(-1,0,1)$经$(1,0,1)$、$(1,2,1)$到$\left(1,2,\frac{\pi}{3}\right)$的折线为积分路径，则

$$\int_{(-1,0,1)}^{(1,2,\frac{\pi}{3})} 2xe^{-y}dx+(\cos z-x^2e^{-y})dy-y\sin zdz$$

$$=\int_{-1}^{1} 2xdx+\int_{0}^{2}(\cos 1-e^{-y})dy-\int_{1}^{\frac{\pi}{3}} 2\sin zdz=e^{-2}$$

或用凑微分 $d(x^2e^{-y}+y\cos z)=Pdx+Qdy+Rdz$更容易。

例23 设f为连续函数，证明曲线积分

$\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(xdx+dy+zdz)$ 与路径无关，并将其化为定积分。

［解］ 因为$f(u)$连续，故必可积。令

$$F(x,y,z)=\int_{a}^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} uf(u)du，则$$

$$dF=\sqrt{x^2+y^2+z^2}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})d(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

$$=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(xdx+ydy+zdz)$$

即$f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(xdx+ydy+zdz)$是$F(x,y,z)$的全微分，故曲线积分与路径无关。于是

$$\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)$$
$$=F(x_2,y_2,z_2)-F(x_1,y_1,z_1)$$
$$=\int_{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}^{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} uf(u)\,\mathrm{d}u$$

自 我 测 试 题

1. 计算曲线积分。

(1) $\oint_L\left(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}\right)\mathrm{d}s$，其中 L 为星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(a>0)$。

(2) $\oint_\Gamma x\,\mathrm{d}s$，其中 Γ 为空间圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2$，$x+y+z=0$。

2. 计算曲线积分。

(1) $\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，其中 L 为不过原点的简单闭曲线；

(2) $\int_\Gamma(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$，$\Gamma$ 为球面上 $(x^2+y^2+z^2=a^2)$ 的三角形 $(x\geqslant0, y\geqslant0, z\geqslant0)$ 围线正向。

3. 利用格林公式计算曲线积分。

(1) $\oint_L e^{-(x^2+y^2)}(\cos 2xy\,\mathrm{d}x+\sin 2xy\,\mathrm{d}y)$，$L$ 为圆 $x^2+y^2=a^2$ 的顺时针方向；

(2) $\int_L \frac{y^2}{\sqrt{R^2+x^2}}dx+[4x+2y\ln(x+\sqrt{R^2+x^2})]dy$，其中 L 是沿圆周 $x^2+y^2=R^2$ 由点 $A(R,0)$ 依逆时针方向到点 $B(-R,0)$ 的半圆。

4. 确定 λ 的值，使曲线积分 $\int_A^B (x^4+4xy^\lambda)dx+(6x^{\lambda-1}y^2-5y^4)dy$ 与路径无关，并求当 A、B 分别为 $(0,0)$ $(1,2)$ 时，曲线积分的值。

5. 计算曲面积分

(1) $\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)ds$，其中 Σ 为圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被曲面 $x^2+y^2=2ax$ 所割下的部分；

(2) $\iint\limits_{\Sigma}xyz\,dxdy$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上满足 $x\geqslant0$，$y\geqslant0$ 部分的外侧；

(3) $\oiint\limits_{\Sigma}\frac{x}{r^3}dydz+\frac{y}{r^3}dzdy+\frac{z}{r^3}dxdy$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧。

6. 利用奥-高公式计算曲面积分。

(1) $\oiint\limits_{\Sigma}x^3dydz+\left[\frac{1}{z}f\left(\frac{y}{z}\right)+y^3\right]dzdx+\left[\frac{1}{y}f\left(\frac{y}{z}\right)+z^3\right]\times dxdy$ 其中 $f(u)$ 具有连续导函数，Σ 为 $x>0$ 的锥面 $y^2+z^2-x^2=1$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=1$，$x^2+y^2+z^2=4$ 所围立体表面外侧；

(2) $\iint\limits_{\Sigma}4zx\,dydz-2zdzdx+(1-z^2)dxdy$，其中 Σ 为 $z=$

$a^y\ (0\leqslant y\leqslant z)$，$a>0$，$a\neq 1$ 绕 z 轴旋转所成曲面的下侧。

7. 利用斯托克斯公式计算曲线积分

$$\oint_{\Gamma} y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$$

Γ 为圆周 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ x+y+z=0\end{cases}$，若从 ox 轴的正向看去，这圆周是依反时针方向进行的。

提 示 与 答 案

1. (1) $4a^{\frac{7}{3}}$； (2) $\frac{2}{3}\pi a^3$（将 x 作为参数，$y=y(x)$，$z=z(x)$）

2. (1) L 不包含坐标原点为0，L 包含原点为 2π；
   (2) -4。

3. (1) 0； (2) $\frac{1}{3}$。

4. $\lambda=3$。 $-\frac{79}{5}$。

5. (1) $\frac{64}{15}\sqrt{2}\,a^4$； (2) $\frac{2}{15}$； (3) 4π.

6. (1) $\frac{186}{5}\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$； (2) $2\pi a^2\left[2a^2-\frac{2}{\ln a}+\frac{1}{(\ln a)^2}\right]-2(1-a^4)\pi$

7. $-\sqrt{3}\,\pi a^2$

§3.5 广义积分与含参变量的积分

一、广义积分

1. 无穷限的广义积分

定义：设函数$f(x)$在$[a,+\infty)$连续，取$b>a$，如果极限$\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$存在，则称此极限值为函数$f(x)$在无穷区间$[a,+\infty)$上的广义积分，记作$\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$，即

$$\int_a^{+\infty}f(x)\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

这时也称广义积分$\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$收敛，否则就称广义积分$\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$，发散。

类似地定义

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx \tag{2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,dx+\lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)\,dx \tag{3}$$

其中$a<c<b$，（3）式右端只要有一个发散，它就发散。

如果极限$\lim\limits_{a\to+\infty}\int_{-a}^a f(x)\,dx$存在，则称广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cdot dx$为在柯西主值下收敛。并记作

$$\mathrm{V{\cdot}P.}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^a f(x)\,dx$$

2. 无界函数的广义积分

定义：设$f(x)$在$(a,b]$上连续，而在点a的右领域内无

界，取$\varepsilon>0$，如果极限$\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$存在，则称此极限值为函数$f(x)$在$(a,b]$上的广义积分记作$\int_a^b f(x)\,dx$，即

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \tag{4}$$

这时也称广义积分$\int_a^b f(x)\,dx$收敛，否则就称广义积分发散。

类似地可定义

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \tag{5}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon_1\to0^+}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx+\lim_{\varepsilon_2\to0^+}\int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx \tag{6}$$

其中$a<c<b$，（6）式右端只要有一个发散，它就发散。

如果$\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx+\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right]$存在，则称广义积分$\int_a^b f(x)\,dx$在柯西主值下收敛，记作

$$\text{V.P.}\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx+\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right]$$

其中$f(x)$在$[a,b]$上除点$x=c$外连续，$x\to c$时，$f(x)$无界。

3. 两类广义积分的关系

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{\frac{1}{a}}^{0} f\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=\int_0^{\frac{1}{a}} f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\,dt$$

令$x=\frac{1}{t}$，$dx=-\frac{1}{t^2}dt$。而当$t\to0$时，$f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}$无界。

4. 无穷限的广义积分敛散性判别法

（1）定义判别法。

（2）比较判别法：设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,\ +\infty)$ 上连续，且 $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，若 $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛；若 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散，则 $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 也发散。

（3）极限判别法：设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)\geqslant 0$，若 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x)=k(0\leqslant k<+\infty)$，$p>1$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛

若 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x)=k(0<k\leqslant+\infty)$，$p\leqslant 1$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散。

$k\neq 0$

5．无界函数的广义积分敛散性判别法

（1）定义判别法。

（2）比较判别法：设 $f(x),g(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续，且 $0\leqslant f(x)\leqslant(gx)$，$f(x),g(x)$ 在点 a 的右邻域内无界，若 $\int_a^b g(x)\cdot\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛；若 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散，则 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 也发散。

（3）极限判别法：设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续，且 $f(x)\geqslant 0$，又 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$。若 $\lim\limits_{x\to a}(x-a)^q f(x)=k\ (0\leqslant k<+\infty)$，$0<q<1$ 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛；若 $\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^q f(x)=k(0<k\leqslant+\infty)$，$q\geqslant 1$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散。

6．绝对收敛

若 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛，并称它绝

对收敛；若$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$发散，而$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛，则称它为条件收敛。

对于无界函数的广义积分有类似的定义。

当被积函数$f(x)$可正可负时，它的广义积分敛散性的判别，首先判$|f(x)|$的敛散性，若$|f(x)|$的广义积分收敛，则$f(x)$的广义积分也收敛，若$|f(x)|$的广义积分发散，这时，不能确定$f(x)$的广义积分的敛散性，它既可能发散，也可能收敛，必须用其他方法或定义来判定。

7． 广义积分的计算

对于广义积分$\int_a^b f(x)dx$（a,b可无限），首先判断它为何类广义积分，对于两类皆具有的广义积分，一定要进行分解，使各个积分只有一个无界点或只有一个积分区间为无穷限，然后，求出各广义积分的值，最后求它们的代数和。

若广义积分收敛，则定积分中的牛顿-莱布尼兹公式、换元法、分部积分法均可应用。

二、广义二重积分

定义： 区域D_1是无界区域D内的任一有界闭区域，函数$f(x,y)$在区域D上连续，设区域D_1以任何方式扩充成区域D时（记作$D_1\to D$），如果极限

$$\lim_{D_1\to D}\iint_{D_1}f(x,y)d\sigma$$

存在，则称此极限值为函数$f(x,y)$在无界区域D上的广义二重积分。记作$\iint_D f(x,y)d\sigma$，即

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma=\lim_{D_1\to D}\iint_{D_1} f(x,y)\,d\sigma$$

这时，称广义二重积分收敛，否则就称它发散。

三、含参变量的积分

1. 定义和性质

定义：若函数$f(x,y)$在矩形区域$[a,b;c,d]$上有定义且连续，则积分$\int_a^b f(x,y)\,dx$称为含参变量的积分，它是定义在$[c,d]$上的y的函数，是一种新形式函数，记作$I(y)$，即

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx,\quad (c\leqslant y\leqslant d)$$

同理可定义

$$\varphi(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy,\quad (a\leqslant x\leqslant b)$$

性质：

(1)若$f(x,y)$在矩形域$[a,b;c,d]$上连续，则

$$\lim_{y\to y_0} I(y)=\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\,dx=\int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)\,dx$$

(2)若$f(x,y)$，$f'_y(x,y)$在矩形域$[a,b;c,d]$上均连续，则

$$\frac{dI(y)}{dy}=\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx=\int_a^b \frac{\partial}{\partial y}[f(x,y)]\,dx$$
$$=\int_a^b f'_y(x,y)\,dx$$

(3)若$f(x,y)$，$f'_y(x,y)$在矩形域$[a,b;c,d]$上均连续，$a(y)$，$b(y)$在$[c,d]$上均可微，且$a\leqslant a(y)\leqslant b$，$a\leqslant b(y)\leqslant b$

$(c\leqslant y\leqslant d)$，则

$$F'(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_{a(y)}^{b(y)}f(x,y)\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_{a(y)}^{b(y)}f_y'(x,y)\,\mathrm{d}x+f[b(y),y]b'(y)$$
$$-f[a(y),y]a'(y)\qquad\text{（称为莱布尼兹公式）}$$

（4）若 $f(x,y)$ 在矩形域 $[a,b;c,d]$ 上连续，则

$$\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

四、解 题 示 例

例 1 判别广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{arctg}x}{x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$ **的敛散性**

［解］ 该题具有无限区间和无界函数的两类广义积分，必须分成单一类型的广义积分。

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{arctg}x}{x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\mathrm{arctg}x}{x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$$

$$+\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{arctg}x}{x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x=I_1+I_2$$

对于 I_1，因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{1}{2}}\mathrm{arctg}x}{x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{arctg}x}{x\sqrt{1+x}}=1,$$

$$q=\frac{1}{2}<1$$

故 I_1 收敛。

对于I_2，因为$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\operatorname{arctg}x}{x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+x}}=\dfrac{\pi}{2}$，$p=2>1$，故$I_2$收敛。

于是，$I=I_1+I_2$收敛。

例 2 判别广义积分$\int_2^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$的敛散性。

［解］ 因为

$$\left|\frac{\sin x}{x\sqrt{1+x^2}}\right|<\frac{1}{x^2}\quad(2<x<+\infty)$$

而 $\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 收敛，故 $\int_2^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$ 收敛。

例 3 判别广义积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$的敛散性。

［解］ 因为$x=0$与$x=\dfrac{\pi}{2}$都是被积函数的无界点，必须分离。

$$原式=I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin^p x\cos^q x}\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^p x\cos^q x}\mathrm{d}x$$

$$=I_1+I_2$$

对于I_1，因为$\lim\limits_{x\to 0^+}x^p\dfrac{1}{\sin^p x\cos^q x}=1$，故当$0<p<1$时，$I_1$收敛，当$p\geqslant1$时，$I_1$发散。

对于I_2，因为$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)^q\dfrac{1}{\sin^p x\cos^q x}=1$，故当$0<q<1$时，$I_2$收敛；当$q\geqslant1$时，$I_2$发散，于是当$0<q<1$、$0<q<1$

时，I收敛，否则发散。

例 4 判别$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$的敛散性。

［解］ 因为

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{5}{6}}\cdot\frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\left[\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{\sin x}\,\ln\sin x\right]$$
$$=0$$

$$q=\frac{5}{6}<1$$

故 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 收敛

例 5 判别$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$敛散性。

［解］ 因为

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}=0,\ p=2>1$$

故 I 收敛。于是 $I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 收敛。

例 6 已知广义积分$\int_0^{+\infty}\left[\frac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)}-1\right]\mathrm{d}x=1$，求常数$a$和$b$。

［解］ 由已知条件，积分

$$\int_1^{+\infty}\left[\frac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)}-1\right]\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{(b-a)x+a}{x(2x+a)}\mathrm{d}x$$

收敛，则$b-a=0$，即$a=b$，否则$\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\frac{(b-a)x+a}{x(2x+a)}=\frac{b-a}{2}$

$p=1$，积分发散。故得

$$\int_1^{+\infty}\frac{a}{x(2x+a)}\mathrm{d}x=1$$

而 $$\int_1^{+\infty}\frac{a}{x(2x+a)}\mathrm{d}x=\lim_{B\to+\infty}\int_1^B\frac{a}{x(2x+a)}\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{B\to+\infty}\left[\ln\frac{x}{2x+a}\right]_1^B=\lim_{B\to+\infty}\left[\ln\frac{B}{2B+a}-\ln\frac{1}{2+a}\right]$$

$$=\ln\frac{2+a}{2}$$

于是 $$\ln\frac{2+a}{2}=1,\ \frac{2+a}{2}=\mathrm{e}$$

即 $$a=2\mathrm{e}-2=b$$

例 7 讨论 $\Gamma(p)=\int_0^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \quad (p>0)$ **的收敛性。**

[解] $\Gamma(p)=\int_0^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

$$+\int_1^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=I_1+I_2$$

当 $0<p<1$ 时，I_1 为无界函数的广义积分，因为 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{1-p}[x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}]=1$，故 I_1 收敛。

$p\geqslant1$ 时，I_1 为定积分，收敛，

I_2 为无穷限广义积分。因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2(x^{p-1}\mathrm{e}^{-x})=0$，故 I_2 收敛。

于是 $\Gamma(p)$ 收敛。

例 8 计算 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\mathrm{d}x$。

[解] 积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$ 在 $x=0$ 时，被积函数无界。

且为正值。因为

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{2}}\ln\frac{1}{\sin x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\ln\sin x}{x^{-\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to 0^+}-\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\times\frac{1}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\cos x}=0,\quad q=\frac{1}{2}<1$$

故$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$收敛，从而广义积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$存在，进而广义积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x$收敛。

下面先证

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\mathrm{d}x$$

令$x=\frac{\pi}{2}-t$，则

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\ln\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)(-\mathrm{d}t)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\mathrm{d}x$$

于是 $2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\ln\sin x+\ln\cos x]\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{\sin 2x}{2}\mathrm{d}x$

$$=-\frac{\pi}{2}\ln 2+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin 2x\mathrm{d}x\qquad(令\ 2x=u)$$

$$=-\frac{\pi}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln\sin u\mathrm{d}u$$

$$= -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin u \mathrm{d}u + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln \cos u \mathrm{d}u\right]$$

令 $u = \pi - v$,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln \sin u \mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin v \mathrm{d}v$$

故
$$2I = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \frac{I+I}{2}$$

$$I = -\frac{\pi}{2}\ln 2$$

例 9 证明：$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

[证] $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x \xlongequal{x=\frac{1}{t}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}t$

于是
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2} \xlongequal{t=x-\frac{1}{x}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+2}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\sqrt{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

例10 证明积分$I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx$与$\alpha$无关，并计算它的值。

［证］ $$I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx$$
$$=\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx$$
$$+\int_1^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx=I_1+I_2$$

而 $$I_1=\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx\overset{x=\frac{1}{t}}{=\!=\!=}\int_{+\infty}^1\frac{1}{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\left(1+\frac{1}{t^\alpha}\right)}$$
$$\times\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=\int_1^{+\infty}\frac{t^\alpha}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}dt$$
$$=\int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx$$

故 $$I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx$$
$$+\int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$$
$$=[\operatorname{arc\,tg}x]_1^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

即I与α无关。

例11 证明：在整个xoy面D上，积分$I=\iint_D e^{-x^2-y^2}d\sigma$是收敛的，并求其值。

［解］ 取以坐标原点为中心，R为半径的圆域D_R，则

由极坐标系，有

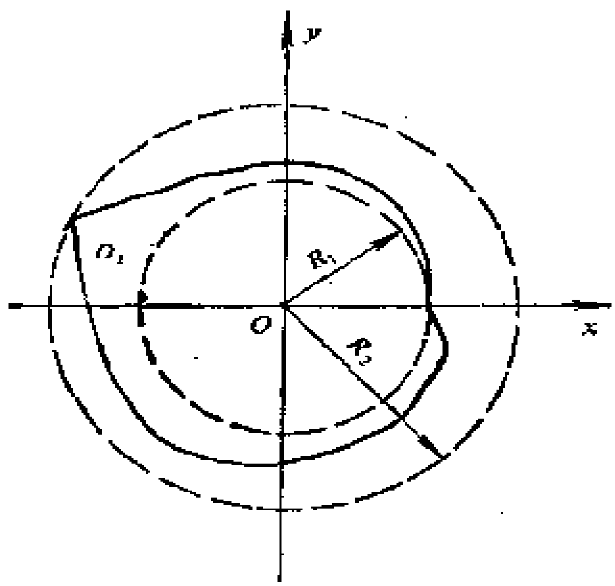
$$I(D_R)=\iint_{D_R} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_R} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R e^{-r^2}r\mathrm{d}r=\pi(1-e^{-R^2})$$

当 $R\to\infty$ 时，$D_R\to D$，且

$$\lim_{D_R\to D}\iint_{D_R} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma=\lim_{R\to+\infty}\pi(1-e^{-R^2})=\pi$$

如果 D_1 为包含原点在内的闭区域，则由于 $e^{-x^2-y^2}>0$，有 $I(D_{R_1})\leqslant I(D_{R_1})\leqslant I(D_{R_2})$，$D_{R_1},D_1,D_{R_2}$ 如下图。



当 $D_1\to D$ 时，必然 $R_1\to+\infty$，$R_2\to+\infty$，于是

$$I(D_{R_1})=\iint_{D_{R_1}} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma\to\pi$$

$$I(D_{R_2})=\iint_{D_{R_2}} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma\to\pi$$

由两面夹准则，

$$\lim_{D_1\to D}\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma=\lim_{D_1\to D} I(D_1)=\pi$$

即
$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi$$

如果 D_1 为正方形区域 $-a\leqslant x\leqslant a$，$-a\leqslant y\leqslant a$，则

$$\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma=\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\mathrm{d}x\int_{-a}^{a} e^{-y^2}\mathrm{d}y=\left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2$$

当 $D_1\to D$ 时，必然 $a\to+\infty$

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2=\lim_{a\to+\infty}\left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2$$

$$=\lim_{a\to+\infty}\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi$$

从而得 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$，故 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$。

例12 由上例结果，计算$\int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$。

［解］ 因为 $\frac{1}{x^2}=\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\right]$

于是
$$\int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x\right.$$

$$\left.-\int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x\right]$$

$$I_1=\int_0^{+\infty}e^{-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-2}\,d\left(x-\frac{1}{x}\right)$$

$$\xlongequal{令\ \omega=x-\frac{1}{x}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2-\omega^2}d\omega=e^{-2}\pi$$

$$I_2=\int_0^{+\infty}e^{-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2}\,d\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$=\int_0^1 e^{-\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2}\,d\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$+\int_1^{+\infty}e^{-\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2}\,d\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$\left(令\ x+\frac{1}{x}=u\right)$$

$$=-\int_2^{+\infty}e^{-u^2+2}du+\int_2^{+\infty}e^{-u^2+2}du=0$$

故原式$=\frac{1}{2}(I_1-I_2)=\frac{\pi}{2e^2}$

例13 计算 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^m}\ (m>0)$。

[解] 这是广义二重积分，因为被积函数$\frac{1}{(x^2+y^2)^m}$在点$(0,0)$无界，且非负，采用极坐标系。

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^m}$$

$$= \lim_{\delta \to 0^+} \int_0^{2\pi} d\theta \int_\delta^1 \frac{r}{r^{2m}} dr$$

$$= 2\pi \lim_{\delta \to 0^+} \int_\delta^1 \frac{1}{r^{2m-1}} dr$$

$$= \begin{cases} 2\pi \lim\limits_{\delta \to 0^+} \dfrac{r^{2-2m}}{2-2m} \Big|_\delta^1 = \begin{cases} \dfrac{\pi}{1-m}, & \text{当 } 0<m<1 \\ -\infty, & \text{当 } m>1 \end{cases} \\ 2\pi \lim\limits_{\delta \to 0^+} \ln r \Big|_\delta^1 = -\infty, \quad \text{当 } m=1 \end{cases}$$

故当 $0<m<1$ 时，$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \dfrac{dxdy}{(x^2+y^2)^m} = \dfrac{\pi}{1-m}$；

当 $m\geqslant 1$ 时，$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \dfrac{dxdy}{(x^2+y^2)^m}$ 发散。

例14 设（1）$F(y)=\int_0^y \dfrac{\ln(1+xy)}{x} dx$，

（2）$F(y)=\int_y^{y^2} \dfrac{\sin yx}{x} dx$。求 $F'(y)$。

［解］（1）性质（3）条件满足，故有

$$F'(y)=\int_0^y \frac{x}{(1+xy)x} dx + \frac{\ln(1+y^2)}{y} - 0$$

$$= \frac{1}{y} \ln(1+xy) \Big|_0^y + \frac{\ln(1+y^2)}{y} = \frac{2}{y} \ln(1+y^2)$$

（2）性质（3）条件满足，故有

$$F'(y)=\int_y^{y^2} \cos yx dx + 2y \frac{\sin y^3}{y^2} - \frac{\sin y^2}{y}$$

$$= \left[\frac{\sin yx}{y} \right]_y^{y^2} + \frac{2\sin y^3}{y} - \frac{\sin y^2}{y}$$

$$=\frac{3\sin y^3-2\sin y^2}{y}$$

例15 计算$I=\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx\quad(a>0,\ b>0)$。

〔解〕 因为 $\int_a^b x^y dy=\frac{x^b-x^a}{\ln x}$

于是 $I=\int_0^1 dx\int_a^b x^y dy$（由性质4，交换积分顺序）

$$=\int_a^b dy\int_0^1 x^y dx=\int_a^b\left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_0^1 dy$$

$$=\int_a^b\frac{1}{1+y}dy=[\ln(1+y)]_a^b=\ln\frac{1+b}{1+a}$$

例16 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos x}\quad(|\alpha|<1)$。

〔解〕 设 $I(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos x}$

$$I'(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\cos x}{1+\alpha\cos x}+\frac{\cos x}{1-\alpha\cos x}\right]$$

$$\times\frac{1}{\cos x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{1+\alpha\cos x}+\frac{1}{1-\alpha\cos x}\right]dx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1-\alpha^2\cos^2x}dx$$

令$u=\text{tg}x$，$\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$，　$dx=\frac{1}{1+u^2}du$。故

$$I'(\alpha)=2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+(1-\alpha^2)u^2}=\frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{1-\alpha^2}\,u\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}\qquad\qquad (|\alpha|<1)$$

于是
$$I(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}\mathrm{d}\alpha=\pi\arcsin\alpha$$

例17 证明
$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y\neq\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x.$$

[证] 因为
$$\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{x^2+y^2}\right]$$
$$\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]$$

于是
$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y=\int_0^1\left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_0^1\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$$

而
$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\left[-\frac{x}{x^2+y^2}\right]_0^1\mathrm{d}y$$
$$=-\int_0^1\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y=-\frac{\pi}{4}$$

故
$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y\neq\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x$$

这是因为$\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$在矩形区域[0,1;0,1]上不连续造成的。

自我测试题

1. 判别下列广义积分的敛散性。

（1） $\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+\ln x}\mathrm{d}x$； （2） $\int_0^{\pi}\frac{\sqrt{\sin x}}{x}\mathrm{d}x$

（3） $\int_1^{+\infty}\sin\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$； （4） $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\mathrm{d}x$

（5） $\int_1^{2}\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x$；

（6） $B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\mathrm{d}x$

2. 计算积分。

（1） $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\cos bx\,\mathrm{d}x$； （2） $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}\mathrm{d}x$

（3） $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$； （4） $\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

（5） $\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$； （6） $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos 2x}}\mathrm{d}x$

3. 应用$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\sqrt{\pi}$，计算$\lim\limits_{t\to+\infty}\int_0^x t\mathrm{e}^{-t y^2}\mathrm{d}y$。

4. 已知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$，计算$\int_0^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$。

5. 求下列函数的导数。

（1） $\varphi(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}(y^2\sin x-y^3)\mathrm{d}y$

(2) $\varphi(x)=\int_x^{x^2} e^{-xy^2}\mathrm{d}y$

6. 计算 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos^2 x+a^2\sin^2 x)\mathrm{d}x \quad (a>0)$.

7. 计算 $I=\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

8. 计算 $I=\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x \quad (0<a<b)$.

提 示 与 答 案

1. (1) 因为 $\frac{1}{1+\ln x}>\frac{1}{2x}$，故发散；

(2) $\frac{\sqrt{\sin x}}{x}\sim\frac{1}{\sqrt{x}}$，故收敛；

(3) $x^2\sin\frac{1}{x^2}\to 1\ (x\to+\infty)$ 收敛；(4) 发散；

(5) $(x-1)\frac{1}{\ln x}\to 1\ (x\to 1)$ 发散；

(6) 记 $B=\int_0^{\frac{1}{2}}+\int_{\frac{1}{2}}^1=B_1,B_2$

分别对 B_1,B_2 讨论。$\alpha>0$，$\beta>0$ 收敛，其他情形发散。

2. (1) $\frac{a}{a^2+b^2}$；

(2) 令 $u=\frac{1}{x^5}$，$\frac{1}{5}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$；

(3) $\frac{\pi}{2}$；　　　　(4) $\frac{2}{3}$；

(5) $x = \sin t$，$-\frac{\pi}{2}\ln 2$　　　　(6) 0。

3. 令$z=\sqrt{t}\,y$，$\lim\limits_{t\to+\infty}\int_0^x t e^{-ty^2}dy=\begin{cases}\frac{\sqrt{\pi}}{2}, & x>0\\ 0, & x=0\\ -\frac{\sqrt{\pi}}{2}, & x<0\end{cases}$

4. $\frac{1}{1+e^x}=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}e^{-nx}\quad(x>0)$，

故为$\frac{\pi^2}{12}$。

5. (1) $\frac{1}{3}\cos x(\cos x-\sin x)(1+2\sin 2x)$

(2) $2xe^{-x^5}-e^{-x^3}-\int_x^{x^2}y^2e^{-xy^2}dy$

6. 提示：$\varphi(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos^2x+a\sin^2x)dx$，$\varphi(1)=0$，

$$\varphi(a)=I=\pi\ln\frac{1+a}{2}.$$

7. 提示：$\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2y^2}dy$，

$$I=\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2}).$$

8. 提示：$\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int_a^b x^y dy$，

$$I=\operatorname{arctg}(1+b)-\operatorname{arctg}(1+a).$$

§3.6 积分应用

一、积分应用问题解法与步骤

(1)分析问题是否为积分问题，即所求量是否对积分区域具有可加性，若是，进行(2)；

(2)选取哪一种积分，要使所求的几何、物理量清楚地用积分表示出来；

(3)选取适当的坐标系，并作草图，使积分表达式简单，定限方便，计算容易；

(4)写出积分表达式，并计算出来。

二、几何应用

1. 平面图形面积

方法：①定积分 $A=\int_a^b |y_1(x)-y_2(x)|\,dx$

②二重积分 $A=\iint\limits_D dx\,dy$

③曲线积分 $A=\frac{1}{2}\oint\limits_L x\,dy-y\,dx$ 可用格林公式推得

2. 空间形体的体积

方法：①定积分，旋转体或截面面积已知立体的体积；

②二重积分 $\iint\limits_D |z_1(x,y)-z_2(x,y)|\,dx\,dy$

③三重积分 $\iiint\limits_\Omega dx\,dy\,dz$

④由奥—高公式

$$V=\frac{1}{3}\oiint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

3. 空间曲线弧长

方法：① $s=\int_{\Gamma}\mathrm{d}s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2+\omega'^2}\,\mathrm{d}t$

Γ：$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，$z=\omega(t)$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$

② L为平面曲线，方程为$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$

$$s=\int_{L}\mathrm{d}s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}\,\mathrm{d}t \qquad (\alpha<\beta)$$

方程为极坐标形式$r=r(\theta)$，$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+r'^2}\,\mathrm{d}\theta \qquad (\alpha<\beta)$$

4. 曲面面积

方法：①定积分(旋转体的表面积)

$$s=2\pi\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}s$$

$$=2\pi\int_{a}^{b}f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$$

②(一般立体表面)对面积的曲面积分

$$s=\iint_{\Sigma}\mathrm{d}s$$

③设曲面s：$z=f(x,y)$，s在xoy面上投影区域为D

$$s=\iint_{D}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

三、物理及力学应用

1. 求质量 m

设 Ω 为一块可度量的几何体，它的密度函数为 $\rho(M)$，$\rho(M)$ 在 Ω 上连续，则几何体 Ω 的质量 m 为

$$m=\int_{\Omega}\rho(M)\,\mathrm{d}\Omega$$

当 Ω 为平面区域 D，则 m 为平面域 D 的质量。

2. 求重心坐标

设 Ω 为一块可度量的几何体，它的密度函数为 $\rho(M)$，$\rho(M)$ 在 Ω 上连续，则几何体 Ω 的重心三坐标 $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ 为

$$\bar{x}=\frac{\int_{\Omega}x\rho(M)\,\mathrm{d}\Omega}{\int_{\Omega}\rho(M)\,\mathrm{d}\Omega},\quad \bar{y}=\frac{\int_{\Omega}y\rho(M)\,\mathrm{d}\Omega}{\int_{\Omega}\rho(M)\,\mathrm{d}\Omega},\quad \bar{z}=\frac{\int_{\Omega}z\rho(M)\,\mathrm{d}\Omega}{\int_{\Omega}\rho(M)\,\mathrm{d}\Omega}$$

当 Ω 为空间一段可求长弧段 s，则 $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ 为该弧段重心的坐标。

3. 求转动惯量

设 Ω 为一块可度量的几何体，它的密度函数为 $\rho(M)$，$\rho(M)$ 在 Ω 上连续，则物体 Ω 关于坐标轴、原点与坐标面的转动惯量为

$$I_z=\int_{\Omega}(x^2+y^2)\rho(M)\,\mathrm{d}\Omega \qquad I_y=\int_{\Omega}(x^2+z^2)\rho(M)\,\mathrm{d}\Omega$$

$$I_x=\int_{\Omega}(y^2+z^2)\rho(M)\,\mathrm{d}\Omega \qquad I_o=\int_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\times\rho(M)\,\mathrm{d}\Omega$$

$$I_{xy}=\int_{\Omega}z^2\rho(M)\,\mathrm{d}\Omega \qquad I_{yz}=\int_{\Omega}x^2\rho(M)\,\mathrm{d}\Omega$$

$$I_{xz}=\int_{\Omega}y^2\rho(M)\,\mathrm{d}\Omega$$

当 Ω 为有界曲面 Σ 时，

$$I_{xy}=\iint_{\Sigma}z^2\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s$$

$$I_{yz}=\iint_{\Sigma}x^2\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s$$

$$I_{xz}=\iint_{\Sigma}y^2\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s$$

$$I_x=\iint_{\Sigma}(y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s$$

$$I_y=\iint_{\Sigma}(x^2+z^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s$$

$$I_z=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s$$

$$I_o=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s$$

4. 求引力

设 Ω 为一块可度量的几何体，$M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为 Ω 外的一点，Ω 的密度函数 $\rho(M)$ 为连续函数，点 M_0 上有单位质量，则几何体 Ω 对质点 M_0 的引力 $\boldsymbol{F}=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}+F_z\boldsymbol{k}$

$$F_x=k\int_{\Omega}\frac{\rho(M)(x-x_0)}{r^3}\,\mathrm{d}\Omega,\qquad F_y=k\int_{\Omega}\frac{\rho(M)(y-y_0)}{r^3}\,\mathrm{d}\Omega$$

$$F_z=k\int_{\Omega}\frac{\rho(M)(z-z_0)}{r^3}\,\mathrm{d}\Omega$$

其中 k 为引力常数，$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$。

5. 变力作功

力 $\mathbf{F}=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$ 沿空间曲线 Γ 所作的功为

$$W=\int_{\Gamma}\mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s}=\int_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

$(\mathrm{d}\mathbf{s}=\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\}$为$\Gamma$ 的切向量)

在各类积分定义中，为了计算所求的量U，我们分四个步骤：一是将U分成 n 个部分的和，即$U=\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta U_i$；二是用$\mathrm{d}U_i\approx\Delta U_i$；三是$U\approx\sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{d}U_i$；四是取极限$(n\to\infty)$；即$U=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{d}U_i=\int_a^b\mathrm{d}U$，其中二是非常重要的。称$\mathrm{d}U=f(x)\cdot\mathrm{d}x$为"微元"。积分应用中，寻找所求量的"微元"就成为解决问题的关键，这种方法称为微元法。

四、解 题 示 例

例 1 求星形线 $x=a\cos^3t$，$y=a\sin^3t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$所围图形面积，以及它绕$x$ 轴旋转一周所得立体的表面积。

[解] 由于星形线由参数方程给出，故用定积分较简单。

$$A=4\int_0^a y\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\sin^3t\cdot 3a\cos^2t\sin t\mathrm{d}t$$

$$=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4t-\sin^6t)\mathrm{d}t$$

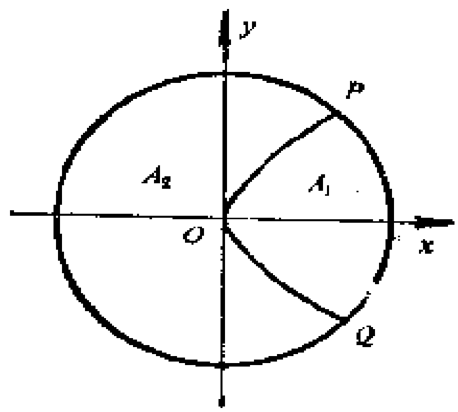
$$=12a^2\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right]\frac{\pi}{2}=\frac{3}{8}\pi a^2$$

表面积 $Q=2\cdot 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t$

$$\times\sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2+(3a\sin^2 t\cos t)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t\cdot 3a\cos t\sin t\,\mathrm{d}t=\frac{12}{5}\pi a^2$$

例 2 抛物线 $y^2=2x$ 分割圆 $x^2+y^2\leqslant 8$ 两部分，分别求出两部分面积。



[解] 由方程 $y^2=2x$ 与 $x^2+y^2=8$，解得交点为 $P(2,2)$，$Q(2,-2)$，将圆的面积分为 A_1 和 A_2：

$$A_1=\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-2}^{2}\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{8-y^2}}\mathrm{d}x$$

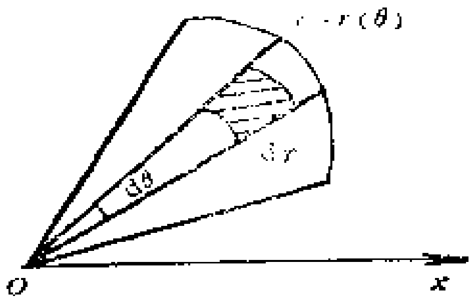
$$=2\int_0^2\left(\sqrt{8-y^2}-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}y=2\left[\pi+2-\frac{4}{3}\right]$$

$$=2\pi+\frac{4}{3}$$

$$A_2=8\pi-A_1=6\pi-\frac{4}{3}$$

例 3 证明：面积 $0\leqslant\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta\leqslant\pi$ $\quad 0\leqslant r\leqslant r(\theta)$，绕极轴旋转一周所成立体体积为 $V=\frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$。

[证]　取中心角为 $d\theta$，边长各为 dr 和 $rd\theta$ 的面积元素，绕极轴旋转所成的体积为 $2\pi y r dr d\theta$，于是中心角为 $d\theta$ 的扇形绕极轴旋转一周所得的体积为 ($x=r(\theta)\cos\theta$，$y=r(\theta)\sin\theta$)

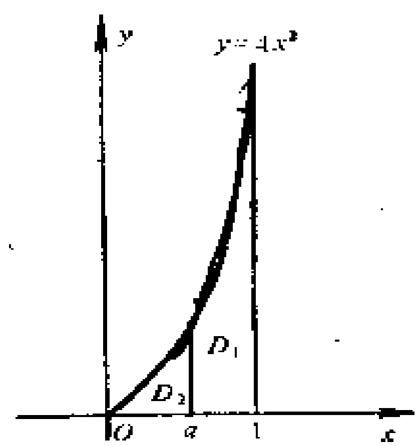


$$dV=\int_0^{r(\theta)}2\pi y r d\theta dr$$

$$=2\pi\int_0^{r(\theta)}r^2\sin\theta dr=\frac{2}{3}\pi r^3(\theta)\sin\theta d\theta$$

故
$$V=\frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta d\theta$$

例 4　设 D_1 是抛物线 $y=4x^2$ 和三条直线 $x=1$，$y=0$，$x=a\ (0<a<1)$ 所围区域，D_2 是抛物线 $y=4x^2$ 与两条直线 $x=a$，$y=0$ 所围区域，试求：(1)由 D_1 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积 V_1；(2)由 D_2 绕 y 轴旋转所得旋转体的体积 V_2；(3)使得 V_1+V_2 为最大值的 a 之值。



[解]　(1)　$dV_1=\pi y^2dx$

$$V_1=\int_a^1\pi(4x^2)^2dx=\int_a^1 16\pi x^4dx$$

$$=\frac{16}{5}\pi(1-a^5)$$

(2)　$dV_2=2\pi xydx$

$$V_2=2\pi\int_0^a 4x^3\mathrm{d}x=8\pi\int_0^a x^3\mathrm{d}x=2\pi a^4$$

(3) $V=V_1+V_2=\frac{16}{5}\pi(1-a^5)+2a^4\pi$

$$V'(a)=-16\pi a^4+8\pi a^3$$

令 $V'(a)=0$，即 $8\pi-16\pi a=0$，

驻点为 $a=\frac{1}{2}$，$a=0$ 舍去

因为只有一个驻点，且最大值一定存在，故当$a=\frac{1}{2}$时，$V=V_1+V_2$取最大值。

例 5 曲面 $x^2+y^2+az=4a^2$ 将球$x^2+y^2+z^2\leqslant 4az$分成两部分，求这两部分的体积之比。

[解] 这是空间曲面围成的体积，用三重积分较简单。

球面方程 $x^2+y^2+(z-2a)^2=(2a)^2$，其所围体积为$V=\frac{32}{3}\pi a^3$，两曲面交线$\begin{cases}x^2+y^2+az=4a^2\\x^2+y^2+z^2=4az\end{cases}$在 xoy 上的投影曲线为$\begin{cases}x^2+y^2=3a^2\\z=0\end{cases}$，球面的下部与曲面 $x^2+y^2+az=4a^2$ 之间的体积为V_1

$$V_1=\iiint\limits_{\Omega_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}a}r\mathrm{d}r\int_{2a-\sqrt{4a^2-r^2}}^{4a-\frac{r^2}{a}}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{3}a}\left(2a-\frac{r^2}{a}+\sqrt{a^2-r^2}\right)r\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi\left[ar^2-\frac{1}{3}(4a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{r^4}{4a}\right]_0^{\sqrt{3}a}=\frac{37}{6}\pi a^3$$

球面上部与曲面 $x^2+y^2+az=4a^2$ 之间的体积为 V_2

$$V_2=V-V_1=\frac{32}{3}\pi a^3-\frac{37}{6}\pi a^3=\frac{27}{6}\pi a^3$$

故 $$V_1:V_2=37:27$$

例 6　求曲面 $z=axy$ $(a>0)$ 包含在圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 内的部分曲面面积。

［解］　求曲面面积，一般采用对面积的曲面积分。

$$\frac{\partial z}{\partial x}=ay \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=ax,$$

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy=\sqrt{1+a^2(x^2+y^2)}\,dxdy$$

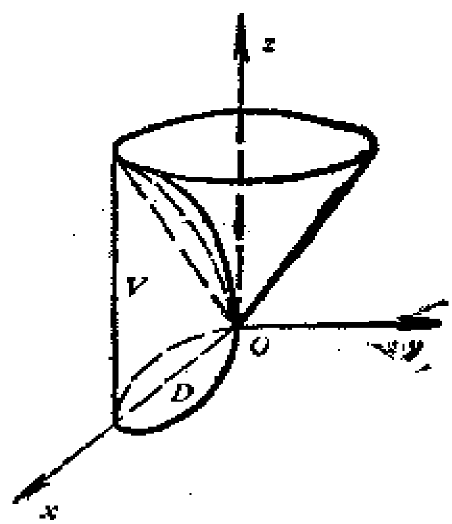
曲面 Σ 在 xoy 面上的投影域 $D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant a^2\}$

$$Q=\iint_{\Sigma}ds=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+a^2(x^2+y^2)}\,dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\sqrt{1+a^2r^2}\,rdr$$

$$=\pi\int_0^a\sqrt{1+a^2r^2}\,d(r^2)$$

$$=\frac{2\pi}{3a^2}\left[(1+a^4)^{\frac{3}{2}}-1\right]$$



例 7　设 V 为曲面 $x^2+y^2-x=0$ 和 $x^2+y^2=z^2$ 所围成的空间封闭图形。（1）求 V 的体积；（2）求 V 的表面积

［解］　（1）草图如右。

$$V=2\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta}r^2\mathrm{d}r$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{8}{9}$$

（2）设锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$x^2+y^2-x=0$所截截面为S_1，而柱面$y=\sqrt{x-x^2}$被锥面$z^2=x^2+y^2$所截截面为S_2

$$S_1:\quad z=\sqrt{x^2+y^2}\qquad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

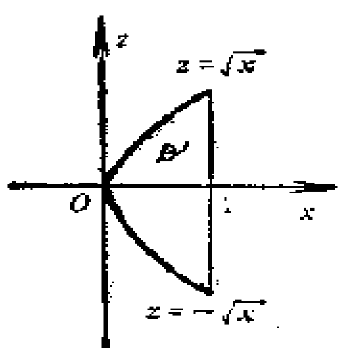
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

S_1的面积为Q_1

$$Q_1=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

$$S_2:\quad y=\sqrt{x-x^2},\quad \frac{\partial y}{\partial x}=\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}},\quad \frac{\partial y}{\partial z}=0$$



又由$\begin{cases}x^2-x+y^2=0\\ x^2+y^2=z^2\end{cases}$消去$y$，得$z=\pm\sqrt{x}$。则$S_2$在$xoz$面上的投影为由$z=\pm\sqrt{x}$及$x=1$所围区域$D'$（如图）。

S_2的面积Q_2

$$Q_2=\iint\limits_{D'}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

$$=\iint\limits_{D'}\sqrt{1+\left(\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D'}\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x=[-2\sqrt{1-x}]_0^1=2$$

故V的表面积 $Q=2(Q_1+Q_2)=2\left[\frac{\sqrt{2}}{4}\pi+2\right]=4+\frac{\pi}{2}\sqrt{2}$。

例 8 求螺线$x=a\cos t$，$y=a\sin t$　$z=bt(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$一段的长。

［解］

$$s=\int_\Gamma\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t+b^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{d}t=2\pi\sqrt{a^2+b^2}$$

积分在物理、力学上的应用，要注意坐标系的选取及采用何种积分，使得所求的物理、力学量的积分表达式简单，计算方便。

例 9 抛物面壳 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ $(0\leqslant z\leqslant 1)$ 在点(x,y,z)的密度函数为 $\rho=z$，求此壳的质量及重心坐标。

[解]　质量 $m=\iint\limits_{\Sigma}\rho\mathrm{d}S$，$\Sigma$ 为 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)\quad(0\leqslant z\leqslant 1)$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

曲面 Σ 在 xoy 面上投影域为 $D_{xy}=\{(x,y)/x^2+y^2\leqslant 2\}$，

于是 $$m=\iint\limits_{\Sigma}\rho\mathrm{d}S=\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+r^2}\,r^3\mathrm{d}r$$

$$=\frac{2\pi(1+6\sqrt{3})}{15}$$

由于抛物面壳的形状与质量分布的对称性，可知 $\bar{x}=0$，$\bar{y}=0$，而

$$\bar{z}=\frac{1}{m}\iint\limits_{\Sigma}z\rho\mathrm{d}S=\frac{1}{4m}\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)^2\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{4m}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+r^2}\,r^5\mathrm{d}r=\frac{11\sqrt{2}-4}{14(1+6\sqrt{3})}$$

故此壳的重心坐标为 $\left(0,0,\frac{11\sqrt{2}-4}{14(1+6\sqrt{3})}\right)$

例10　在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上，取以 $A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$C\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 三点为顶点的球面三角形的三边 $\widehat{AB}$，$\widehat{BC}$，$\widehat{CA}$ 均为大圆弧，如果球面密度 $\rho=x^2+z^2$，求此球面三角形块的质量。

［解］ 球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$，

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

此球面上大圆弧$\overparen{BC}$的方程为

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\x-z=0\end{cases}$$

消去 z，得 BC 在 xoy 面上的投影为椭圆：$\begin{cases}z=0\\2x^2+y^2=1\end{cases}$，即以 A、B、C 为顶点的球面三角形块 Σ 在 xoy 面上的投影区域 D_{xy} 为：$0\leqslant y\leqslant 1$；$\dfrac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{2}}\leqslant x\leqslant\sqrt{1-y^2}$

故此球面三角块的质量为

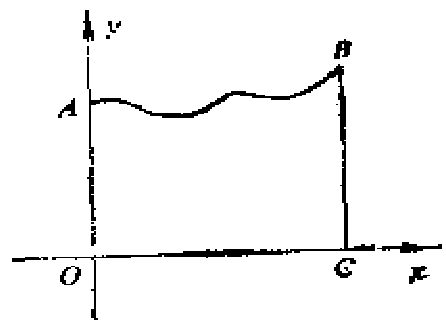
$$m=\iint_{\Sigma}(x^2+z^2)\,\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}\frac{1-y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1-y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 (1-y^2)\left(\arcsin 1-\arcsin\sqrt{\frac{1}{2}}\right)dy$$

$$=\frac{1}{4}\pi\int_0^1 (1-y^2)\,dy=\frac{\pi}{6}$$

例11 求曲线AB(如图)的方程，使图形$OABC$绕x轴旋转所形成的旋转体的重心的横坐标等于B点的横坐标的$\frac{4}{5}$。



〔解〕 设$C(x,0)$，$B(x,f(x))$，即AB的方程为$y=f(x)$，则生成的旋转曲面方程为

$$z^2+y^2=f^2(x)$$

设此旋转曲面与$x=0$，$x=x$所围区域为Ω，密度$\rho=$常数，由题意

$$\frac{1}{\pi\int_0^x f^2(x)\,dx}\iiint_\Omega x\,dx\,dy\,dz=\frac{4}{5}x$$

即 $$\frac{4}{5}x\pi\int_0^x f^2(x)\,dx=\int_0^x x\,dx\int_{-f(x)}^{f(x)}dy\int_{-\sqrt{f^2(x)-y^2}}^{\sqrt{f^2(x)-y^2}}dz$$

$$=\int_0^x x\,dx\int_{-f(x)}^{f(x)}2\sqrt{f^2(x)-y^2}\,dy$$

$$=2\int_0^x x\left[\frac{y}{2}\sqrt{f^2(x)-y^2}+\frac{f^2(x)}{2}\arcsin\frac{y}{f(x)}\right]_{-f(x)}^{f(x)}dx$$

$$=\pi\int_0^x xf^2(x)\,dx$$

故得

$$\frac{4}{5}x\int_0^x f^2(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^x xf^2(x)\,\mathrm{d}x$$

两边对 x 求导，得

$$\frac{4}{5}\int_0^x f^2(x)\,\mathrm{d}x+\frac{4}{5}xf^2(x)=xf^2(x)$$

$$4\int_0^x f^2(x)\,\mathrm{d}x=xf^2(x)$$

两边再对 x 求导，得

$$4f^2(x)=f^2(x)+2f(x)\cdot x\cdot f'(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{3}{2x}f(x),\qquad \frac{\mathrm{d}f(x)}{f(x)}=\frac{3}{2}\,\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

解得 $f(x)=cx^{\frac{3}{2}}$ 即为所求的曲线方程。

例12 求下列均匀物体(密度为 ρ)对原点的转动惯量 I_0。(1) 圆面 $(x-a)^2+y^2\leqslant a^2\quad(a>0)$；(2) 球体 $x^2+y^2+(z-a)^2\leqslant a^2$；(3) 圆周 $(x-a)^2+y^2=a^2$；(4) 球面 $x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$。

〔解〕 (1) 采用极坐标，圆面区域为 D：$-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，$0\leqslant r\leqslant 2a\cos\theta$。故圆面对原点转动惯量为

$$I_0=\rho\iint\limits_D(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\rho\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^2r\,\mathrm{d}r$$

$$=4a^4\rho\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta=8a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{3}{2}\rho\pi a^4$$

(2) 采用球面坐标系，球体区域为 Ω：$0\leqslant r\leqslant 2a\cos\varphi$，$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$。故球体对原点的转动惯量为

$$I_0=\rho\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$$

$$=\rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2\cdot r^2\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{32}{5}a^5\cos^5\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=2\pi\rho\cdot\frac{32}{5}a^5\cdot\frac{1}{6}=\frac{32}{15}\pi\rho a^5$$

（3） 圆周$(x-a)^2+y^2=a^2$ 可用参数方程表示：

$$L:\begin{cases}x=a+a\cos t\\y=a\sin t\end{cases}\quad(0\leqslant t\leqslant2\pi)$$

故圆周对原点的转动惯量为

$$I_0=\rho\oint_L(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\rho\int_0^{2\pi}[(a+a\cos t)^2+(a\sin t)^2]\sqrt{a^2(\cos^2t+\sin^2t)}\mathrm{d}t$$

$$=2a^3\rho\int_0^{2\pi}(1+\cos t)\mathrm{d}t=4\pi\rho a^3$$

（4） 球面方程Σ： $x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$

上半球面为Σ_1： $z_1=a+\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

下半球面为Σ_2： $z_2=a-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

球面在xoy面上投影区域为D_{xy}： $x^2+y^2\leqslant a^2$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z_1}{\partial y}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z_2}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z_2}{\partial y}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

故球面对原点的转动惯量为

$$I_0=\rho\oiint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S$$

$$=\rho\left[\iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma_2}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S\right]$$

$$=\rho\left[\iint_{D_{xy}}2az_1\sqrt{1+\left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z_1}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right.$$

$$\left.+\iint_{D_{xy}}2az_2\sqrt{1+\left(\frac{\partial z_2}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z_2}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$$

$$=4a^3\rho\iint_{D_{xy}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$=4a^3\rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}\mathrm{d}r$$

$$=8\pi\rho a^3\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{a-\varepsilon}\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}\mathrm{d}r$$

$$=8\pi\rho a^3\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-\sqrt{(a^2-r^2)}\right]_0^{a-\varepsilon}=8\pi\rho a^4$$

例13 求均匀正方体(密度 $\rho=1$，边长也为 1)关于对角线 AG 的转动惯量。

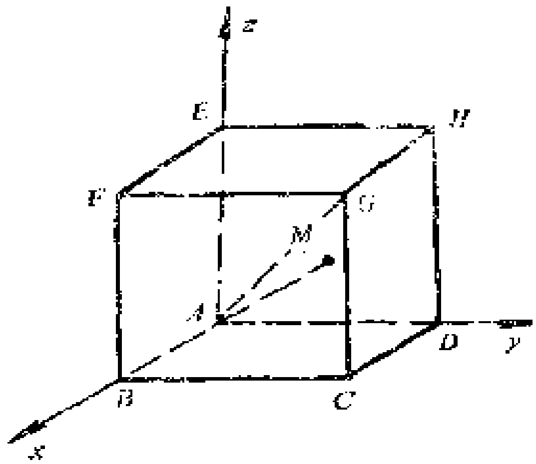
〔解〕 设 $M(x,y,z)$ 为正方体 Ω 内任意一点，它到对角线 AG 的距离为 r(取如图的坐标系)

$$r=\frac{|\overrightarrow{AM}\times\overrightarrow{AG}|}{|\overrightarrow{AG}|}$$

$$r^2=\frac{1}{3}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]$$

$$=\frac{2}{3}(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$$

故所求的转动惯量为

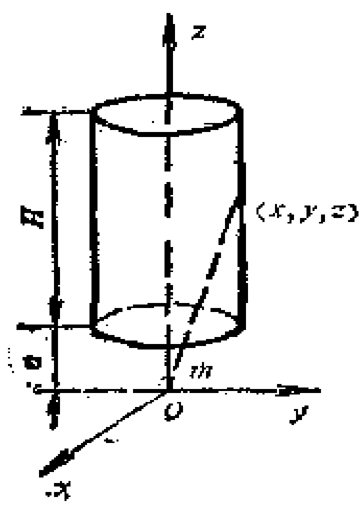


$$I=\iiint\limits_{\Omega} r^2 \mathrm{d}V$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 (x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)\,\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{6}$$

例14 设有一半径为R高为H的均匀正圆柱体，在其中心轴上高出圆柱体底面为a处有一质量为m的质点，试求此柱体对该点的引力（设圆柱体的密度ρ为常数）。



［解］ 以质点为原点，圆柱体Ω的中心轴为Oz轴，建立直角坐标系(如下图)，由Ω的对称性可知，圆柱体对质量的引力$\boldsymbol{F}$在x轴、y轴上投影为0，即$F_x=0$，$F_y=0$，而在z轴上投影为F_z，

$$F_z=\iiint\limits_{\Omega} k\rho\frac{mz}{r^3}\mathrm{d}V$$

其中：$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，k为比例常数。

采用柱面坐标计算

$$F_z=k\rho m\int_a^{a+H} z\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\frac{r\mathrm{d}r}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=2\pi k\rho m\int_a^{a+H}z\left[\frac{1}{2}\int_0^R\frac{\mathrm{d}(r^2+z^2)}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right]\mathrm{d}z$$

$$=2\pi k\rho m\int_a^{a+H}z\left[\frac{1}{z}-\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]\mathrm{d}z$$

$$=2\pi k\rho m[z-\sqrt{R^2+z^2}]_a^{a+H}$$
$$=2\pi k\rho m[H-\sqrt{R^2+(a+H)^2}+\sqrt{R^2+a^2}]$$

故所求引力为

$$F=2\pi k\rho m[H-\sqrt{R^2+(a+H)^2}+\sqrt{R^2+a^2}]\boldsymbol{k}$$

例15 求均匀球壳对不在其球壳上一质点 P(质量为 1)的引力。

[解] 设密度 ρ 为常数，球心在坐标原点，半径为 R，质点P位于正向z轴上，离球的距离为a，$a\neq R$。由于球壳的对称性，易知$F_x=F_y=0$，而 $F_z=k\iint\limits_{\Sigma}\rho\frac{z-a}{r^3}\mathrm{d}S$，其中 r为球面Σ上任意一点到P的距离。采用球面坐标系

$$x=R\cos\varphi\cos\theta,\quad y=R\cos\varphi\sin\theta,\quad z=R\sin\varphi$$
$$\mathrm{d}S=R^2\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta,\quad r=\sqrt{R^2+a^2-2Ra\sin\varphi}$$

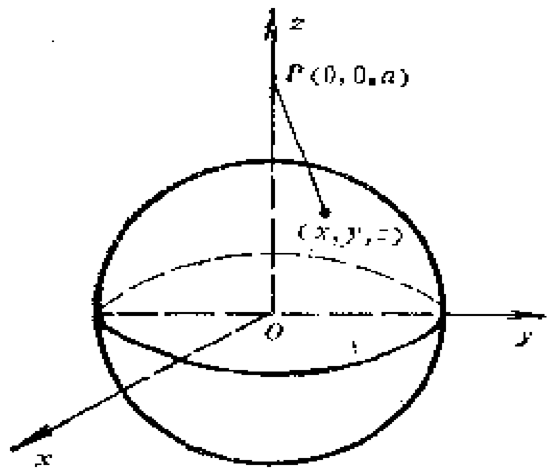
于是

$$F_z=k\rho\iint\limits_{\Sigma}\frac{z-a}{r^3}\mathrm{d}S=k\rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{R^2(R\sin\varphi-a)\cos\varphi}{(R^2+a^2-2Ra\sin\varphi)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\varphi$$

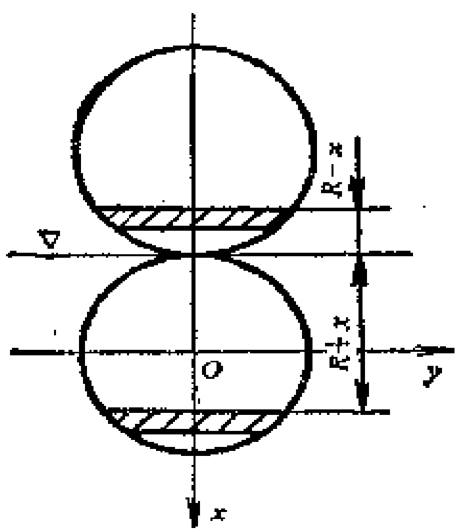
令 $\sqrt{R^2+a^2-2Ra\sin\varphi}=t$，则

$$R\sin\varphi-a=\frac{1}{2a}(R^2-a^2-t^2),\qquad \cos\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{-1}{Ra}t\mathrm{d}t$$

故
$$F_z=-\frac{\pi R\rho k}{a^2}\int_{R+a}^{|R-a|}\left(\frac{R^2-a^2}{t^2}-1\right)\mathrm{d}t$$
$$=-\frac{\pi R\rho k}{a^2}\left\{(R^2-a^2)\left[\frac{1}{R+a}-\frac{1}{|R-a|}\right]\right.$$
$$\left.-|R-a|+(R+a)\right\}$$
$$=\begin{cases}0 & \text{当}a<R\\ -\dfrac{4\pi R^2\rho k}{a^2} & a>R\end{cases}$$



因此在均匀球壳内的点，都不感受到球壳表面的任何引力，而在球壳外的点，所感受到球壳表面的引力，与集中球壳的全部质量$M=4\pi R^2\rho$于球心时该点所感受到的引力一样。



例16 设有一半径为R，长为l的圆柱体平放在深度为$2R$的水池中(圆柱体的侧面与水平面相切)，设圆柱体比重为$\mu(\mu>1)$，现将圆柱体从水中移出水面，问需作多少功。

[解] 选取如右图的坐标系。将柱体分层，在水深x处，厚度为$\mathrm{d}x$的一层柱体提到水平面之上所作之功为

$$\mathrm{d}W=(\mu-1)(R+x)2yl\mathrm{d}x+\mu(R-x)2yl\mathrm{d}x$$

$$=2ly[(2\mu-1)R-x]dx$$

$$W=2l\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}[(2\mu-1)R-x]dx$$

$$=2l\int_{-R}^{R}(2\mu-1)R\sqrt{R^2-x^2}\,dx=(2\mu-1)\pi lR^3$$

例17 求质点沿xOy平面内的椭圆L运动一周(逆时针方向)力场作的功。若椭圆的中心在原点，长半轴、短半轴分别是4和3，焦点在x轴上，力场为

$$\boldsymbol{F}=(3x-4y+2z)\boldsymbol{i}+(4x+2y-3z^2)\boldsymbol{j}+(2xz-4y^2+z^3)\boldsymbol{k}$$

[解] 由题设，椭圆L的方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1\\ z=0\end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases}x=4\cos t\\ y=3\sin t\\ z=0\end{cases}$$

故所求功W为

$$W=\int_L \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}=\int_L(3x-4y+2z)dx+(4x+2y-3z^2)dy$$
$$+(2xz-4y^2+z^3)dz$$
$$=\int_0^{2\pi}[(3\times4\cos t-4\times3\sin t)(-4\sin t)$$
$$+(4\times4\cos t+2\times3\sin t)3\cos t]dt$$
$$=\int_0^{2\pi}(48-30\sin t\cos t)dt=96\pi$$

自 我 测 试 题

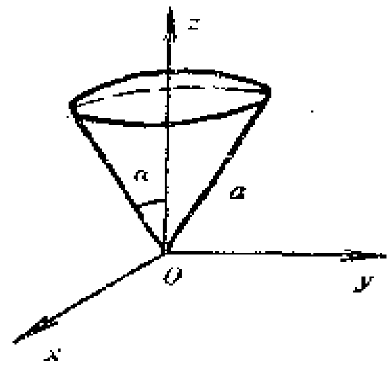
1. 用几种方法计算$x^2+y^2=a^2$，$y^2+z^2=a^2$所围区域的体积。

2. 求下列曲线与 $y=0$ 所围区域的面积，曲线弧长绕 x 轴旋而成立体体积及侧面积。

（1） $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$

（2） $r=a(1+\cos\theta)$

$(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$



3. 求球面 $x^2+y^2+z^2=2cy$ $(c>0)$夹在锥面$x^2+y^2=z^2$内的部分面积。

4. 求一均匀球顶锥体的重心(右图)。

5. 求下列曲线所界均匀薄板的重心。

（1） $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$与$x$轴

（2） $r=a(1+\cos\theta)$ $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$

6. 求曲线$x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$一段弧长的重心。

7. 在球心位于原点，半径为 a 的均匀半球体靠圆形平面的一旁拼接一个半径与球半径相等、材料相同的均匀圆柱体，使拼接后的整个立体的重心位于球心，试确定圆柱体的长应为多少？

8. 计算引力：

（1） 均匀薄片$x^2+y^2\leqslant R^2$，$z=0$，关于z轴上一点$(0,0,c)$ $(c>0)$处单位质量的引力。

（2） 设有一匀质球壳，壳的内外半径分别为 R_1 与 R_2 $(R_2>R_1)$，求球壳与不在其上的一单位质点之间的引力。

9. 求长方体关于它的一条棱的转动惯量。

10. 求均匀球壳 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(z\geqslant 0)$ 对于轴的转动惯量。

11. 求曲线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ $(a>0)$ 所围均匀薄板对原点的转动惯量。

12. 设力的方向向着坐标原点，力的大小与质点距坐标原点的距离成正比，设此点依反时针方向描绘出曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$，求力所作的功。

13. 在 xOy 面上有力 $\boldsymbol{F}=\frac{e^x}{1+y^2}\boldsymbol{i}+\frac{2y(1-e^x)}{(1+y^2)^2}\boldsymbol{j}$ 构成力场，求质点沿圆周 $x^2+(y-1)^2=1$ 从点 $O(0,0)$ 移动到点 $A(1,1)$ 时场力所作的功。

提 示 与 答 案

1. $\frac{16}{3}a^3$

2. (1) $3\pi a^2$, $8a$, $5\pi^2a^3$, $\frac{64}{3}\pi a^3$

   (2) $\frac{3}{2}\pi a^2$, $8a$, $\frac{8}{3}\pi a^3$, $\frac{32}{5}\pi a^3$

3. $2\pi c^2$

4. $\bar{x}=\bar{y}=0$, $\bar{z}=\frac{3}{8}(1+\cos\alpha)a$

5. (1) $\bar{x}=\pi a$, $\bar{y}=\frac{4}{3}a$

（2） $\bar{x}=\frac{5}{6}a$，$\bar{y}=\frac{16}{9\pi}a$

6. $\bar{x}=\pi a$，$\bar{y}=\frac{4}{3}a$

7. $\frac{\sqrt{2}}{2}a$

8. （1） $F_x=F_y=0$ $\quad F_z=2k\pi\rho c\left[\frac{1}{c}-\frac{1}{R^2+c^2}\right]$

（2） $F_x=F_y=0$ $\quad F_z=\begin{cases} k\frac{m}{a^2} & (a>R_2) \\ 0 & (a<R_1) \end{cases}$

m 为球壳质量。

9. $0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant b$，$0\leqslant z\leqslant c$，$\frac{abc}{3}(a^2+b^2)$

10. $\frac{4}{3}\pi a^4$

11. $\frac{\pi}{8}a^4$

12. $\frac{K(a^2-b^2)}{2}$ （K为常数）

13. $\frac{e-1}{2}$

§3.7 场 论

一、梯 度

1. 定义

设M为数量场$u(M)$中的一点，$\boldsymbol{G}(M)$为向量，如果$\boldsymbol{G}(M)$的方向是函数$u(M)$在M点变化率最大的方向，其模是$u(M)$在M点处最大变化率，则称向量$\boldsymbol{G}(M)$为数量场$u(M)$在M点的梯度，记作$\mathrm{grad}u|_M=\boldsymbol{G}(M)$。

在空间直角坐标系中，梯度计算公式为

$$\mathrm{grad}u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

记作 $\mathrm{grad}u=\nabla u$，其中$\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$称为Hamilton算子。

2． 运算规律

(i) $\mathrm{grad}(cu)=c\,\mathrm{grad}u$　　(c为常数)

(ii) $\mathrm{grad}(u\pm v)=\mathrm{grad}u\pm\mathrm{grad}v$

(iii) $\mathrm{grad}(uv)=u\,\mathrm{grad}v+v\,\mathrm{grad}u$

(iv) $\mathrm{grad}[f(u)]=f'(u)\mathrm{grad}u$

(v) $\mathrm{grad}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{1}{v^2}(v\,\mathrm{grad}u-u\,\mathrm{grad}v)$

3． 与方向导数的关系

$u=u(x,y,z)$在点$M(x,y,z)$沿方向$\boldsymbol{l}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$的方向导数$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$，则

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\mathrm{grad}u\cdot\boldsymbol{l}=|\mathrm{grad}u|\cos\theta$$

其中θ为$\mathrm{grad}u$与$\boldsymbol{l}$之间的夹角。

二、散　　度

1． 定义

设有一向量场

$$A=P(x,y,z)i+Q(x,y,z)j+R(x,y,z)k$$

其中P、Q、R具有一阶连续偏导数，Σ是向量场中任一封闭曲面，Ω为Σ所围成的区域，V为Ω的体积，让Ω缩向一点$M(x,y,z)$，如果极限$\lim\limits_{\Omega\to M}\frac{1}{V}\oiint\limits_{\Sigma}A\cdot n\mathrm{d}S$存在，则称此极限值为$A$在点$M$的散度，记作$\mathrm{div}A$，即

$$\mathrm{div}A=\lim_{\Omega\to M}\frac{1}{V}\oiint_{\Sigma}A\cdot n\mathrm{d}S$$

其中n为Σ上点$M(x,y,z)$向外的单位法向量。

在空间直角坐标系中，散度计算公式为

$$\mathrm{div}A=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

2. 运算规律

(i) $\mathrm{div}(cA)=c\,\mathrm{div}A$　　(c为常数)

(ii) $\mathrm{div}(A\pm B)=\mathrm{div}A\pm\mathrm{div}B$

(iii) $\mathrm{div}(uA)=u\,\mathrm{div}A+A\cdot\mathrm{grad}u$　　(u为数量函数)

3. 奥-高公式的向量形式

$$\oiint_{\Sigma}A\cdot n\mathrm{d}S=\iiint_{\Omega}\mathrm{div}A\mathrm{d}V$$

其中Σ为包围Ω的封闭曲面的外侧。

三、旋　度

1. 定义

若在向量场

$$A=P(x,y,z)i+Q(x,y,z)j+R(x,y,z)k$$

中的一点M处，存在这样的一个向量$\boldsymbol{B}$，向量$\boldsymbol{A}$在点M处沿该方向的环量面密度为最大，这个最大数值等于$|\boldsymbol{B}|$，则称向量$\boldsymbol{B}$为向量场$\boldsymbol{A}$在点M处的旋度，记作$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$，即$\boldsymbol{B}=\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$。

在空间直角坐标系中，旋度的计算公式为

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=$$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

$$\xlongequal{\text{记作}}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

2. 运算规律

(i) $\mathrm{rot}(c\boldsymbol{A})=c\,\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ （c为常数）

(ii) $\mathrm{rot}(\boldsymbol{A}_1\pm\boldsymbol{A}_2)=\mathrm{rot}\boldsymbol{A}_1\pm\mathrm{rot}\boldsymbol{A}_2$

(iii) $\mathrm{rot}(u\boldsymbol{A})=u\,\mathrm{rot}\boldsymbol{A}+\mathrm{grad}u\times\boldsymbol{A}$

(iv) $\mathrm{div}(\boldsymbol{A}_1\times\boldsymbol{A}_2)=-\boldsymbol{A}_1\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_2\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{A}_1$

(v) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}u)=0$

(vi) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{A})=0$

3. 斯托克斯公式的向量形式

$$\oint_L\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s=\iint_\Sigma\mathrm{rot}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

其中$\boldsymbol{\tau}$为L上的单位切向量，方向与L一致，$\boldsymbol{n}$是Σ上任意一点(x,y,z)处的单位法向量。

四、有势场和调和场

设$\boldsymbol{A}(x,y,z)$（$(x,y,z)\in\Omega$）为向量场，如果有连续可

微函数 $u(x,y,z)$，使得 $\boldsymbol{A}=\mathrm{grad}\,u\,((x,y,z)\in\Omega)$ 成立，称 $\boldsymbol{A}$ 为有势场，并称 $v=-u$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的势函数。

在线单连域 Ω 内，$\boldsymbol{A}$ 为有势场，$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=0$（即 $\boldsymbol{A}$ 为无旋场）。实际上，在线单连域内，有势场、无旋场、曲线积分 $\int_{M_0}^{M}\boldsymbol{A}\cdot\tau\mathrm{d}s$ 与路径无关，$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 为全微分是相互等价的。

设 $\boldsymbol{A}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$ 为有势场，$-u$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的势函数，则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=P$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=Q$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=R$，即

$$\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

$$u(x,y,z)=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z+c$$

(x_0,y_0,z_0) 为 Ω 内任一定点。

定义：如果在向量场 $\boldsymbol{A}$ 中，恒有 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=0$ 与 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=0$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为调和场。

若 $\boldsymbol{A}$ 为调和场，由 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=0$ 知，于是存在 u，使得 $\boldsymbol{A}=\mathrm{grad}\,u$，又由 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=0$，$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,u)=0$，即

$$\mathrm{div}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

称为 Laplace 方程，u 称为调和函数。

若 $\boldsymbol{A}=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$ 为平面调和场

$$v(x,y)=-\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\mathrm{d}x-\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\mathrm{d}y \qquad (1)$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的势函数，

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}-Q(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\mathrm{d}y \qquad (2)$$

称为A的力函数。

比较(1)、(2)式，得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad -\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (3)$$

u、v均满足二维Laplace方程：$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$。称$u$、$v$为共轭调和函数。如果已知其中一个，应用(3)式，便可求得另一个。

五、解 题 示 例

例 1 空间哪些点，可使函数$u=x^3+y^3+z^3-3xyz$的梯度：(1) 垂直于Ox轴；(2) 平行于Ox轴；(3) 等于0。

[解] $\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3yz$, $\frac{\partial u}{\partial y}=3y^2-3xz$,

$\frac{\partial u}{\partial z}=3z^2-3xy$

$\mathrm{grad}u=(3x^2-3yz)\boldsymbol{i}+(3y^2-3xz)\boldsymbol{j}+(3z^2-3xy)\boldsymbol{k}$

(1) $\mathrm{grad}u$垂直于Ox轴，$3x^2-3yz=0$，即曲面$x^2=yz$上每一点的梯度都垂直于Ox轴。

(2) $\mathrm{grad}u$平行于Ox轴，$3y^2-3xz=0$，$3z^2-3xy=0$。解得 $y=z=0$或$x=y=z$时，$\mathrm{grad}u$平行Ox轴。

(3) $\mathrm{grad}u=0$，$3(x^2-yz)=0$，$3(y^2-xz)=0$，$3(z^2-xy)=0$，解得 $x=y=z$时，$\mathrm{grad}u=0$。

例 2 证明：$\mathrm{grad}u$为常向量的充要条件是：$u=ax+by+cz+d$ (其中a、b、c、d为常数)。

[证] 必要性：设$\mathrm{grad}u=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$(常向量)，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=b,\qquad \frac{\partial u}{\partial z}=c$$

由 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=a$ $\qquad u=ax+\varphi(y,z)$

又 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=b$ 即 $\varphi_y(y,z)=b$，$\varphi(y,z)=by+\psi(z)$

又 $\dfrac{\partial u}{\partial z}=c$ 即 $\psi'(z)=c$，$\psi(z)=cz+d$

故
$$u=ax+by+cz+d$$

充分性：$u=ax+by+cz+d$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=b,\qquad \frac{\partial u}{\partial z}=c$$

$$\mathrm{grad}\,u=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}\qquad (常向量)$$

例 3 设 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，$r=|\boldsymbol{r}|$，$n$为整数，求 $\mathrm{grad}\,r^2$，$\mathrm{grad}\,r^n$，$\mathrm{grad}\,f(r)$。

［解］ $\mathrm{grad}\,r^2=\mathrm{grad}\,(x^2+y^2+z^2)=2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k}$

$$\mathrm{grad}\,r^n=\mathrm{grad}\,(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}}=nr^{n-1}\cdot\frac{1}{r}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$$

$$=nr^{n-2}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})=nr^{n-2}\boldsymbol{r}$$

$$\mathrm{grad}\,f(r)=f'(r)\,\mathrm{grad}\,r=f'(r)\,\mathrm{grad}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$=f'(r)\,\frac{1}{r}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})=f'(r)\,\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

例 4 证明：$\mathrm{grad}\,f(u,v)=\dfrac{\partial f}{\partial u}\mathrm{grad}\,u+\dfrac{\partial f}{\partial v}\mathrm{grad}\,v$

［证］
$$\mathrm{grad}\,f(u,v)=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}f(u,v)+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}f(u,v)+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}f(u,v)$$

$$=\boldsymbol{i}\left[\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right]$$

$$+\boldsymbol{j}\left[\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}\right]+\boldsymbol{k}\left[\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}\right]$$

$$=\frac{\partial f}{\partial u}\left[\boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial u}{\partial z}\right]+\frac{\partial f}{\partial v}\left[\boldsymbol{i}\frac{\partial v}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial v}{\partial y}\right.$$

$$\left.+\boldsymbol{k}\frac{\partial v}{\partial z}\right]=\frac{\partial f}{\partial u}\operatorname{grad}u+\frac{\partial f}{\partial v}\operatorname{grad}v$$

例 5 计算 (1) $\operatorname{div}(\operatorname{grad}u)$；(2) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\boldsymbol{A})$；(3) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}u)$。($\boldsymbol{A}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$)($u$ 具有二阶连续偏导数)

[解] (1) $\operatorname{div}(\operatorname{grad}u)=\operatorname{div}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\right]$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

(2) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\boldsymbol{A})=\operatorname{div}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}\right.$

$$\left.+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=0$$

(3) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}u)=\operatorname{rot}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\end{vmatrix}=0$$

例 6 设 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, $r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。计算(1) $\mathrm{div}\boldsymbol{r}$; (2) $\mathrm{rot}[f(r)\boldsymbol{r}]$; (3) $\mathrm{rot}[\boldsymbol{c}\times f(r)\boldsymbol{r}]$ ($\boldsymbol{c}$为常向量)。

[解] (1) $\mathrm{div}\boldsymbol{r}=\mathrm{div}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})=1+1+1=3$

(2) $\mathrm{rot}[f(r)\boldsymbol{r}]=\mathrm{rot}[f(r)x\boldsymbol{i}+f(r)y\boldsymbol{j}+f(r)z\boldsymbol{k}]$

$$=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f(r)x & f(r)y & f(r)z \end{vmatrix}$$

$$=f'(r)\left[\left(\frac{zy}{r}-\frac{zy}{r}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{zx}{r}-\frac{zx}{r}\right)\boldsymbol{j}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{xy}{r}-\frac{xy}{r}\right)\boldsymbol{k}\right]=0$$

(3) 因为 $\boldsymbol{c}\times f(r)\boldsymbol{r}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ c_x & c_y & c_z \\ f(r)x & f(r)y & f(r)z \end{vmatrix}$

$$=f(r)[(c_yz-c_zy)\boldsymbol{i}+(c_zx-c_xz)\boldsymbol{j}$$
$$+(c_xy-c_yx)\boldsymbol{k}]$$

于是

$\mathrm{rot}[\boldsymbol{c}\times f(r)\boldsymbol{r}]$

$$=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f(r)(c_yz-c_zy) & f(r)(c_zx-c_xz) & f(r)(c_xy-c_yx) \end{vmatrix}$$

$$=\Big[c_xf(r)+f'(r)\frac{y}{r}(c_xy-c_yx)+c_xf(r)-f'(r)\frac{z}{r}$$

$$\times(c_z x-c_x z)\Big]\boldsymbol{i}+\Big[c_y f(r)+f'(r)\frac{z}{r}(c_y z-c_z y)+c_y f(r)$$

$$-f'(r)\frac{x}{r}(c_x y-c_y x)\Big]\boldsymbol{j}+\Big[c_z f(r)+f'(r)\frac{x}{r}(c_z x$$

$$-c_x z)+c_z f(r)-f'(r)\frac{y}{r}(c_y z-c_z y)\Big]\boldsymbol{k}$$

$$=2f(r)[c_x\boldsymbol{i}+c_y\boldsymbol{j}+c_z\boldsymbol{k}]+\frac{f'(r)}{r}[(x^2+y^2+z^2)(c_x\boldsymbol{i}$$

$$+c_y\boldsymbol{j}+c_z\boldsymbol{k})-(c_x x+c_y y+c_z z)(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})]$$

$$=2f(r)\boldsymbol{c}+\frac{f'(r)}{r}[r^2\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}]$$

例 7 设 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，$r=|\boldsymbol{r}|$，求：（1）使 $\mathrm{div}[f(r)\boldsymbol{r}]=0$ 的 $f(r)$；（2）使 $\mathrm{div}[\mathrm{grad}f(r)]=0$ 的 $f(r)$。

[解]（1）由 $\mathrm{div}[f(r)\boldsymbol{r}]=\mathrm{div}[f(r)\cdot(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})]$

$$=\frac{\partial}{\partial x}[f(r)x]+\frac{\partial}{\partial y}[f(r)y]+\frac{\partial}{\partial z}[f(r)z]$$

$$=f(r)+f'(r)\frac{x^2}{r}+f(r)+f'(r)\frac{y^2}{r}+f(r)+f'(r)\frac{z^2}{r}$$

$$=3f(r)+rf'(r)$$

于是 $3f(r)+rf'(r)=0$，即 $\dfrac{\mathrm{d}f(r)}{f(r)}=-\dfrac{3}{r}\mathrm{d}r$．两边积分

$$\ln f(r)=-3\ln r+\ln c$$

故 $$f(r)=\frac{c}{r^3}\qquad(c\text{为任意常数})$$

（2）因为 $\mathrm{div}[\mathrm{grad}f(r)]=\mathrm{div}[f'(r)\mathrm{grad}\,r]$

$$=f'(r)\mathrm{div}[\mathrm{grad}\,r]+\mathrm{grad}\,r\cdot\mathrm{grad}f'(r)$$

$$=f'(r)\operatorname{div}\left[\frac{x}{r}\boldsymbol{i}+\frac{y}{r}\boldsymbol{j}+\frac{z}{r}\boldsymbol{k}\right]+f''(r)\operatorname{grad}r\cdot\operatorname{grad}r$$

$$=f'(r)\frac{2}{r}+f''(r)$$

于是 $\quad f'(r)\dfrac{2}{r}+f''(r)=0\quad$ 即 $\quad\dfrac{f'(r)}{f''(r)}=-\dfrac{r}{2}$

$$\frac{f''(r)}{f'(r)}=-\frac{2}{r}\qquad 即\qquad \frac{\mathrm{d}[f'(r)]}{f'(r)}=-\frac{2}{r}\mathrm{d}r$$

两边积分

$$f'(r)=\frac{\bar{c}_1}{r^2}$$

再积分 $\quad f(r)=-\dfrac{\bar{c}_1}{r}+c_2=\dfrac{c_1}{r}+c_2$

$$(c_1=-\bar{c}_1,\ c_1,\ c_2为任意常数)$$

例 8 求向量场 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 通过下列曲面的通量：(1) 圆锥面 $x^2+y^2\leqslant z^2$ $(0\leqslant z\leqslant h)$ 的底面(向上)；(2) 此圆锥面的侧表面(向外)。

[解] 设 Σ_1,Σ_2,Σ 分别表示此圆锥的底面、侧表面、全表面。则通过全表面(向外)的通量为

$$Q=\oiint_{\Sigma}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iiint_{\Omega}\operatorname{div}\boldsymbol{r}\mathrm{d}V=3\iiint_{\Omega}\mathrm{d}V=\pi h^3$$

(1) 通过底面 S_1 向上的通量为 Q_1

$$Q_1=\iint_{\Sigma_1}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iint_{x^2+y^2=h^2}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{x^2+y^2=h^2}h\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi h^3$$

(2) 通过侧表面 Σ_2 的通量为 Q_2

$$Q_2=Q-Q_1=\pi h^3-\pi h^3=0$$

例 9 求向量 $\boldsymbol{A}=\operatorname{grad}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\right)$ 沿着围线 L 的环流量

Φ：（1）L不围绕Oz轴；（2）L围绕Oz轴（$z=k$常数）。

［解］（1）设L不围绕Oz轴，则作一由围线L所张的曲面Σ，它与Oz轴不相交，于是在Σ上

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\mathrm{rot}\left[\mathrm{grad}\left(\mathrm{arctg}\frac{y}{x}\right)\right]$$

$$=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}\right] & \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}\right] & 0 \end{vmatrix}=0$$

从而 $$\Phi=\oint_{L^+}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s=\iint_{\Sigma^+}\mathrm{rot}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=0$$

（2）设L绕Oz轴转了一圈，并设L与Oz轴最短距离为$d>0$，以Oz轴上任意一点为圆心以$\delta(\delta<d)$为半径，作圆C_δ，作一以C_δ及L为边界的曲面Σ，使Σ与Oz轴不相交，于是

$$\oint_{L^+\cup C_\delta^-}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma^+}\mathrm{rot}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=0$$

于是 $$\Phi=\oint_{L^+}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s=\oint_{C_\delta^+}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s$$

$$=\oint_{C_\delta^+}\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{arctg}\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mathrm{arctg}\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y$$

$$=\oint_{C_\delta^+}\frac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$$

令$x=\delta\cos\theta$，$y=\delta\sin\theta$，则C_δ的方程为$r=\delta$，$z=k$ $(0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$，于是

$$\Phi=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=2\pi$$

如果L绕Oz轴转了 n 圈，则$\Phi=2n\pi$。

例10 物体以角速度ω依逆时针方向绕Oz轴旋转，求速度场$\boldsymbol{v}$和加速度场$\boldsymbol{a}$在空间点$M(x,y,z)$和已知时刻t的散度和旋度。

［解］ $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}=\omega\boldsymbol{k}\times(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$

$=\omega(-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j})$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\omega\left(-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}\right)$$

而
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_x=-\omega y\qquad\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\omega x$$

于是
$$\boldsymbol{a}=-\omega^2(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\-\omega y&\omega x&0\end{vmatrix}=2\omega\boldsymbol{k}\qquad|\boldsymbol{v}|=2\omega$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\-\omega^2x&-\omega^2y&0\end{vmatrix}=0$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v}=\mathrm{div}[-\omega y\boldsymbol{i}+\omega x\boldsymbol{j}]=0$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a}=\mathrm{div}[-\omega^2x\boldsymbol{i}-\omega^2y\boldsymbol{j}]=-\omega^2-\omega^2=-2\omega^2$$

例11 证明$\boldsymbol{A}=yz(2x+y+z)\boldsymbol{i}+xz(x+2y+z)\boldsymbol{j}+xy(x+y+2z)\boldsymbol{k}$是有势场，并求该场的势(函数)。

［解］ 因为

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ yz(2x+y+z) & xz(x+2y+z) & xy(x+y+2z)\end{vmatrix}$$

$$=0$$

故 $\boldsymbol{A}$为有势场。其势函数为$v=-u$，

$$u=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}\boldsymbol{A}\cdot\tau\mathrm{d}s+c$$

$$=\int_0^x 0\mathrm{d}x+\int_0^y 0\mathrm{d}y+\int_0^z xy(x+y+2z)\mathrm{d}z+c$$

$$=xyz(x+y+z)+c$$

故 $$v=-u=-xyz(x+y+z)-c$$

例12 已知平面调和场的力函数$u=x^2-y^2+xy$，求平面调和场$\boldsymbol{A}$及其势函数。

〔解〕 设势函数为v，因为

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-(-2y+x)=2y-x$$

于是 $$v=\int(2y-x)\mathrm{d}x=2xy-\frac{1}{2}x^2+\varphi(y)$$

又因为 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad 2x+\varphi'(y)=2x+y$$

故 $$\varphi'(y)=y,\varphi(y)=\frac{1}{2}y^2+c$$

故 $$v=\frac{1}{2}(y^2+x^2)+2xy+c$$

于是 $$\boldsymbol{A}=-\operatorname{grad}v=-\frac{\partial v}{\partial x}\boldsymbol{i}-\frac{\partial v}{\partial y}\boldsymbol{j}$$

$$=(x-2y)\boldsymbol{i}-(2x+y)\boldsymbol{j}$$

自 我 测 试 题

1. 已知电场的电位$u(M)=\frac{q}{r}$，r为点M到原点的距离，求其梯度。

2. 设$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}$为常向量，计算$\mathrm{grad}|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{r}|^2$。

3. 已知 $\boldsymbol{A}=\left(x^3-\frac{y}{x}\right)\boldsymbol{i}+(y+3\times yz)\boldsymbol{j}+(z-x^2+y)\boldsymbol{k}$，计算（1）$\mathrm{div}\boldsymbol{A}$；（2）$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$。

4. 已知$\boldsymbol{A}=\{axz+x^2, by+xy^2, z-z^2+czx-2xyz\}$，问$a$、$b$、$c$为何值时，$\boldsymbol{A}$是无源场。

5. 设$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$为常向量，计算$\mathrm{rot}[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}]$。

6. 求向量场$\boldsymbol{A}$从内穿出给定闭曲面Σ的流量：

（1）$\boldsymbol{A}=x^3\boldsymbol{i}+y^3\boldsymbol{j}+z^3\boldsymbol{k}$，$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$；

（2）$\boldsymbol{A}=(x-y+z)\boldsymbol{i}+(y-z+x)\boldsymbol{j}+(z-x+y)\boldsymbol{k}$，$\Sigma$为椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

7. 证明向量场$\boldsymbol{A}_1=\{2x+z^2, z, y+2xz\}$有一势函数，而$\boldsymbol{A}_2=\{2y+x^2, x, z+2xy\}$没有势函数，并求一数量函数$\varphi(x,y,z)$，使得$\boldsymbol{A}_1=\mathrm{grad}\varphi(x,y,z)$。

8. 设有无穷长导线与Oz轴一致，通过电流$I\boldsymbol{k}$后，在导线周围便产生磁场，在点$M(x, y, z)$处的磁场强度为

$\boldsymbol{H}=\dfrac{I}{2\pi r^2}(-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j})$（$r$为点$M$到导线的距离），求证$\boldsymbol{H}$为无源场。

9． 求向量场$\boldsymbol{A}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$（$c$为常数）沿下列曲线的环流量：

（1）圆周$\begin{cases}x^2+y^2=R^2\\z=0\end{cases}$；（2）圆周$\begin{cases}(x-2)^2+y^2=R^2\\z=0\end{cases}$.

10． 证明：向量场$\boldsymbol{A}=(2x+y)\boldsymbol{i}+(4y+x+2z)\boldsymbol{j}+(2y-6z)\boldsymbol{k}$为调和场，并求调和函数。

提示与答案

1． $-\dfrac{q}{r^3}\boldsymbol{r}$ 2． $2|\boldsymbol{b}|^2\boldsymbol{r}-2(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{b}$

3． （1）$3x^2+\dfrac{y^2}{x^2}+2+3xz$；

（2）$(1-3xy)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\left(3yz-\dfrac{2y}{x}\right)\boldsymbol{k}$

4． $a=2$，$b=-1$，$c=-2$ 5． $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$

6． （1）$\dfrac{12}{5}\pi a^5$； （2）$4\pi abc$

7． $\varphi(x,y,z)=x^2+yz+xz+c$

8． $\mathrm{div}\,\boldsymbol{H}=0$

9． （1）$2\pi R^2$，（2）$2\pi R^2$

10． $u=x^2+2y^2+xy+2yz-3z^2+c$

第四章　级　数

§4.1　常数项级数

一、基 本 内 容

（1）级数的收敛和发散是借助于级数的部分和数列的极限存在与否来定义的。因此，研究级数及其和数，实质是研究数列及其极限的一种新形式。故收敛数列的一些性质，如线性性质，柯西收敛准则等对收敛级数同样成立。又根据级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的定义，可得到级数收敛的必要条件：$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ 等重要特性。

（2）正项级数收敛的充要条件，是它的部分和数列有界。在这个基本思想指导下可得到一些收敛性的判别法则，每种判别法又有不等式与极限两种形式，可列表如下：

比　较　判　别　法	
存在整数 $N>0$，常数 $c>0$，对 $\forall n \geqslant N$ 有　$u_n \leqslant c v_n$	$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = K$，$0 \leqslant K \leqslant +\infty$
1）若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛 2）若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散．	1）若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，且 $K \neq +\infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛； 2）若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，且 $K \neq 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散．

达朗贝尔判别法	
存在整数$N>0$，对$\forall n\geqslant N$有 1）$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant q$，且$q<1$，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛； 2）$\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$，则$\sum_{n=1}^{\infty}u$发散.	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$ 1）若$l<1$，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛； 2）若$l>1$，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

柯西极值判别法	
存在整数$N>0$，对$\forall n\geqslant N$ 1）$\sqrt[n]{u_n}\leqslant q$且$q<1$ 则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛； 2）$\sqrt[n]{u_n}\geqslant 1$则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散.	$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$ 1）若$l<1$，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛； 2）若$l>1$，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

拉阿伯判别法	
存在整数$N>0$，对$\forall n\geqslant N$有 1）$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\geqslant r$且$r>1$，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛； 2）$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)<1$则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散.	$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=l$ 1）当$l>1$，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛； 2）当$l<1$，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

柯西积分判别法
对$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，$f(n)=u_n$，若$f(x)$在$[1,+\infty)$上连续递减，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与广义积分$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$具有相同的敛散性.

注意：几何级数$\sum_{n=1}^{\infty}q^n$和p－级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$的敛散性，对上述判别具有特殊的意义，而这几种判别法中，比较法是基础，从判别法使用的有效性来说，根值法比达朗贝尔法要强，拉阿伯判别法比达朗贝尔判别法要强。

（3）任意项级数的性质与判别法可见下表。

绝对收敛级数	绝对收敛级数一定是收敛级数
	判别法用正项级数判别法
条件收敛级数判敛法	狄里赫莱判别法：1）$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$的部分和有界；2）$\{a_n\}$单调，趋于零，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n$收敛．
	阿贝尔判别法：1）$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛；2）$\{a_n\}$单调、有界，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n$收敛．
交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$	莱布尼兹判别法：1）$u_{n+1}\leqslant u_n$；2）$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，则$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$收敛．莱布尼兹判别法是狄里赫莱判别法的特例．
级数的运算性质	1）收敛级数运算具有结合律； 2）绝对收敛级数运算满足交换律和分配律。

二、解题示例

例 1 判别级数$\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

$+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\cdots$的敛散性。

[解法 1] 级数 $u_n=\sqrt{2-v_n}$，其中 $v_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots}}}}_{n-1层}$

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$是一正项级数，由于$\lim_{n\to\infty}v_n=2$，$v_{n+1}=\sqrt{2+v_n}$，

$$u_{n+1}=\sqrt{2-\sqrt{2+v_n}}$$

由达朗贝尔判别法得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+v_n}}}{\sqrt{2-v_n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4-(2+v_n)}}{\sqrt{2-v_n}\sqrt{2+\sqrt{2+v_n}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2+v_n}}}=\frac{1}{2}<1$$

所以原级数收敛。

[解法 2] 由于$\sqrt{2}=\frac{2}{\sqrt{2}}=2\cdot\sin\frac{\pi}{4}$

$$=2\cos\frac{\pi}{4}=2\sin\frac{\pi}{2^2}$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2}}=\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2-2\left(2\cos^2\frac{\pi}{8}-1\right)}$$

$$=\sqrt{2-2\left(1-2\sin^2\frac{\pi}{8}\right)}=2\sin\frac{\pi}{2^3}$$

$$2+\sqrt{2}=2+2\cos\frac{\pi}{4}=2\left(1+2\cos^2\frac{\pi}{8}-1\right)$$

$$=4\cos^2\frac{\pi}{8}$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{8}}=2\sin\frac{\pi}{2^4}$$

…………

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}=2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

原级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$

由达朗贝尔判别法得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}{2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\frac{1}{2}<1$$

所以原级数收敛。

例 2 判别级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n-(-1)^n}$的敛散性。

[解]

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2^{-n-1-(-1)^{n+1}}}{2^{-n-(-1)^n}}=2^{-1-(-1)^{n+1}+(-1)^n}$$

$$=\begin{cases}2 & n\text{为偶数}\\ \dfrac{1}{8} & n\text{为奇数}\end{cases}$$

故达朗贝尔判别法不能用。

用根值法

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{-n-(-1)^n}{n}}=\frac{1}{2}<1$$

所以原级数收敛。

例 3 试求级数$\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n^2-3n+2)^x}(n\geqslant 3)$的绝对收敛、条件收敛和发散的区域。

[解] 设$u_n=\frac{(-1)^n}{(n^2-3n+2)^x}(n\geqslant 3)$

显然，当$x\leqslant 0$时$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，所以级数发散。

当$x>0$时，由$\frac{1}{(n^2-3n+2)^x}\geqslant\frac{1}{n^{2x}}$，且当$x>\frac{1}{2}$时$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2x}}$收敛。当$0<x\leqslant\frac{1}{2}$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2x}}$发散。又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_n|}{\frac{1}{n^{2x}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n^2-3n+2)^x}}{\frac{1}{(n^2)^x}}=1$$

根据比较判敛性，

当 $x>\frac{1}{2}$时，$\sum_{n=3}^{\infty}u_n=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n^2-3n+2)^x}$绝对收敛。

当 $0<x\leqslant\frac{1}{2}$时$\sum_{n=3}^{\infty}|u_n|$发散，但交错级数$\sum_{n=3}^{\infty}u_n=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n^2-3n+2)^x}$是莱布尼兹型级数，故它收敛，因此原级数条件收敛。

于是得级数$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n^2-3n+2)^x}$是：

$$\begin{cases}\text{发散，当}x\leqslant 0\text{时；}\\ \text{绝对收敛，当 }x>\frac{1}{2}\text{时；}\\ \text{条件收敛，当 }0<x\leqslant\frac{1}{2}\text{时。}\end{cases}$$

即原级数的发散域为$(-\infty,\ 0]$，收敛域为$(0,+\infty)$且$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$为绝对收敛域，$\left(0,\frac{1}{2}\right]$为条件收敛域。

例 4　已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$，求级数下述的和：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}$$

〔解〕　为了利用已知条件，由题给级数的形式求其和必须将其分解成分母为单项的形式。

由待定系数法得

$$\frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}=\frac{-\frac{3}{4}}{n}+\frac{\frac{1}{4}}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$+\frac{\frac{3}{4}}{n+2}+\frac{\frac{1}{4}}{(n+2)^2}$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\frac{1}{4}}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{\frac{1}{4}}{(n+2)^2}-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^2}$$

$$-\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6}+\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)$$

$$+\frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{6}-1-\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2}=\frac{\pi^2}{4}-\frac{39}{16}$$

例 5 设数列 $\{na_n\}$ 收敛，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$ 收敛，试证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛。

［证］ 令 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=a$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})=S$， 于是

$$\sum_{K=1}^{n}K(a_K-a_{K-1})=(a_1-a_0)+2(a_2-a_1)+3(a_3-a_2)+$$

$$\cdots+n(a_n-a_{n-1})=-a_0-a_1-a_2-\cdots-a_{n-1}+na_n=-\sum_{K=0}^{n-1}a_K$$

$+na_n$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{K=1}^{n}K(a_K-a_{K-1})=\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(-\sum_{K=0}^{n-1}a_K\right)+\lim_{n\to\infty}na_n$$

即
$$S=-\sum_{n=0}^{\infty}a_n+a$$

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛。

§4.2 函数项级数

一、基本内容

（1）形为$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的级数称为函数项级数，若取定实数$x_0$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$即为上节讨论的常数项级数。函数项级数中的一种特殊形式$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$或$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$叫做幂级数。

（2）讨论函数项级数主要是研究它的收敛域和发散域，和函数及一些分析性质，其主要结论有

1）阿贝尔定理：若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x_0(\neq 0)$收敛，则

它在$(-|x_1|, |x_1|)$绝对收敛，若它在x_1处发散，则该级数对于$|x|>|x_1|$的任意x都发散。

2）设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，若$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$(或$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$)，则它的收敛半径为$R=\begin{cases}\frac{1}{\rho}, & 当0<\rho<+\infty\\ +\infty, & 当\rho=0\\ 0, & 当\rho=+\infty\end{cases}$

3）幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在收敛区间$(-R,R)$内的和函数$S(x)$是连续的，且可以进行逐项积分和微分，其收敛半径不变，在相同的收敛域上，幂级数还可以进行一些代数运算，如线性运算和乘法运算等。

（3）形式$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$的幂级数称为泰勒级数，特别当$x_0=0$时又称为马克洛林级数。由于幂级数的特殊性质和用途，将一个函数展开为幂级数的问题是讨论泰勒级数的一个重要问题。

二、解题示例

例6 求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-\sqrt{n}}}{n}\left(\frac{3+2x}{3-x}\right)^n$的收敛域。

【解】 令$\frac{3+2x}{3-x}=y$，则原级数变为幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-\sqrt{n}}}{n}y^n$，

于是收敛半径$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{-\sqrt{n}}}{n}\cdot\dfrac{n+1}{2^{-\sqrt{n+1}}}=1$.

当 $y=\pm1$时幂级数变为数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\pm1)^n\dfrac{2^{-\sqrt{n}}}{n}$,这是一个收敛的级数。因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}2^{-\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^2}}=0$，由比较判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$同收敛。

故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{-\sqrt{n}}}{n}y^n$的收敛域为闭区间$[-1,1]$。因而由

$$-1\leqslant\frac{3+2x}{3-x}\leqslant1$$

解得$-6\leqslant x\leqslant0$,所以原级数的收敛域为$[-6,0]$。

例 7　求级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2^n}}{x^{2^{n+1}}-1}$的和函数，($|x|<1$)。

[解]

$$\frac{x^{2^n}}{x^{2^{n+1}}-1}=\frac{(x^{2^n}+1)-1}{(x^{2^n}+1)(x^{2^n}-1)}=\frac{1}{x^{2^n}-1}-\frac{1}{x^{2^{n+1}}-1}$$

$$S_N=\sum_{n=0}^{N}\frac{x^{2^n}}{x^{2^{n+1}}-1}=\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{x^{2^n}-1}-\frac{1}{x^{2^{n+1}}-1}\right)$$

$$=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^{2^{N+1}}-1}$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2^n}}{x^{2^{n+1}}-1}=\lim_{N\to\infty}S_N=\frac{1}{x-1}+1=\frac{x}{x-1}$$

将一个函数展开为幂级数的方法，一般有两种，规则的方法是直接展开法，即求出各阶导数值，再讨论使泰勒公式的余项趋于零的 x 的范围：$x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$，从而写出级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$，此级数在 $x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 收敛到函数 $f(x)$，得到 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$，$(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$。间接展开法是用得较多的方法，此法运算简单，但灵活性较强。

例 8 求函数 $f(x)=e^x\cos x$ 的马克洛林级数。

[解法 1] 用直接展开法。

$$f'(x)=e^x(\cos x-\sin x)=\sqrt{2}\,e^x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f''(x)=\sqrt{2}\,e^x\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$=(\sqrt{2})^2e^x\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{4}\right)$$

…………

由数学归纳法可证得

$$f^{(n)}(x)=(\sqrt{2})^n e^x\cos\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)$$

于是得

$$f(0)=1,\quad f^{(n)}(0)=(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4},\quad n=1,2,\cdots$$

$$f^{(n+1)}(\theta x)=(\sqrt{2})^{n+1}\cos\left(\theta x+\frac{n+1}{4}\pi\right)e^{\theta x}$$

故得

$$e^{x}\cos x=1+\left(\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}\right)x+\frac{(\sqrt{2})^{2}}{2!}\cos\frac{2\pi}{4}x^{2}$$

$$+\cdots+\frac{(\sqrt{2})^{n}}{n!}\cos\frac{n\pi}{4}x^{n}$$

$$+\frac{(\sqrt{2})^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left(\frac{n+1}{4}\pi+\theta x\right)e^{\theta x}x^{n+1}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{\frac{k}{2}}\cos\frac{k\pi}{4}}{k!}x^{k}$$

$$+\frac{2^{\frac{n+1}{2}}\cos\left(\theta x+\frac{n+1}{4}\pi\right)e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},\quad 0<\theta<1$$

由于

$$|R_n|=\left|\frac{2^{\frac{n+1}{2}}\cos\left(\theta x+\frac{n+1}{4}\pi\right)e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|$$

$$\leqslant\frac{2^{\frac{n+1}{2}}e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow{n\to\infty}0(-\infty<x<+\infty)$$

（注意：此结论可由级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n+1}{2}}|x|^{n+1}}{(n+1)!}$用达朗贝尔判别法判得收敛而得到）

故 $$e^{x}\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}}{n!}x^{n},(-\infty<x<+\infty)$$

［解法 2］ 由欧拉公式 $\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ 得

$$e^x\cos x=e^x\cdot\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\frac{1}{2}[e^{(1+i)x}+e^{(1-i)x}]$$

$$e^{(1+i)x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{n!}x^n,\ e^{(1-i)x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-i)^n}{n!}x^n$$

所以 $e^x\cos x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{(1+i)^n+(1-i)^n}{n!}\right]x^n$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n,\quad(-\infty<x<+\infty)$$

这里应用了以下公式

$$1\pm i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\pm i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$(1+i)^n+(1-i)^n=(\sqrt{2})^n\left[\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right)\right]=2\cdot2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}$$

例 9 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)}$ 展开为马克洛林级数。

［解］ 先将函数化简，由于

$$f(x)=\frac{1-x}{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)}=\frac{1-x}{1-x^8}$$

已知

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots\qquad(-1,1)$$

故得

$$f(x)=(1-x)(1+x^8+x^{16}+\cdots+x^{8n}+\cdots)$$
$$=1-x+x^8-x^9+x^{16}-x^{17}+\cdots$$
$$+x^{8n}-x^{8n+1}+\cdots \qquad (-1,1)$$

例10 将$\frac{1}{x^2}$在点$x_0>0$处展开为幂级数.

〔分析〕 由于$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$，因此我们可先将$\frac{1}{x}$展开为在$x_0$处的幂级数，然后利用逐项微分性质求$\frac{1}{x^2}$的幂级数。

〔解〕 已知

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \qquad (-1,1)$$

由 $$\frac{1}{x}=\frac{1}{x_0+(x-x_0)}=\frac{1}{x_0}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x-x_0}{x_0}\right)}$$

在$\frac{1}{1+x}$的 展开式中将x变换为$\frac{x-x_0}{x_0}$得

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{x_0}\left[1-\frac{x-x_0}{x_0}+\left(\frac{x-x_0}{x_0}\right)^2-\left(\frac{x-x_0}{x_0}\right)^3+\cdots\right.$$
$$\left.+(-1)^n\left(\frac{x-x_0}{x_0}\right)^n+\cdots\right]=\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_0^2}(x-x_0)$$
$$+\frac{1}{x_0^3}(x-x_0)^2-\frac{1}{x_0^4}(x-x_0)^3+\cdots$$
$$+(-1)^n\frac{1}{x_0^{n+1}}(x-x_0)^n+\cdots$$
$$\left(-1<\frac{x-x_0}{x_0}<1\text{即}0<x<2x_0\right)$$

对上式两边微分得

$$-\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{x_0^2}+\frac{2}{x_0^3}(x-x_0)-\frac{3}{x_0^4}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+(-1)^n\frac{n}{x_0^{n+1}}(x-x_0)^{n-1}+\cdots\qquad(0<x<2x_0)$$

例11 求函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的马克洛林级数。

[分析] 由于 $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=(1+x^2)^{-1/2}$，可写出 $(1+x^2)^{-1/2}$ 的马克洛林级数，再利用逐项积分性质就可求出 $f(x)$ 的马克洛林级数。

[解] 已知

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots\qquad(-1,1)$$

于是 $$f'(x)=(1+x^2)^{-1/2}=1+\left(-\frac{1}{2}\right)x^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}$$

$$\times x^4+\cdots+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^{2n}+\cdots$$

$$=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot3}{2!2^2}x^4-\cdots+\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{n!2^n}x^{2n}$$

$$+\cdots\cdots\qquad(-1,\ 1)$$

所以 $\int_0^x f'(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}=x-\frac{1}{2\cdot3}x^3+\frac{1\cdot3}{2!2^2\cdot5}x^5-\cdots$

$$+\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{n!2^n\cdot(2n+1)}x^{2n+1}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{n!2^n(2n+1)}x^{2n+1}\qquad(-1,1)$$

故 $$\int_0^x f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)-f(0)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{n!2^n(2n+1)}x^{2n+1}\qquad(-1,1)$$

例12 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n\cdot n!}x^n$的收敛域和和函数。

[解法1]

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n+1}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2+1}{2^{n+1}\cdot(n+1)!}\cdot\frac{2^n\cdot n!}{n^2+1}\right|=0$$

所以收敛半径$R=+\infty$，即收敛域为$(-\infty,+\infty)$。

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n\cdot n!}x^n=\underline{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n-1)+n+1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

$$\xlongequal{令\frac{x}{2}=t}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{n(n-1)}{n!}+\frac{n}{n!}+\frac{1}{n!}\right]t^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n-1)}{n!}t^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}t^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n$$ e^t

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}t^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}t^n$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n=t^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}t^{n-2}$$

$$+t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}t^{n}$$

$$=(t^2+t+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}=(t^2+t+1)e^t$$

$$(-\infty<t<+\infty)$$

所以 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n\cdot n!}x^n=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+1\right)e^{\frac{x}{2}}\quad(-\infty<x<+\infty)$

［解法 2］ 收敛域同上。已知

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\qquad(-\infty,\ +\infty)$$

$$e^{\frac{x}{2}}=1+\frac{x}{2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n!}x^n$$

于是 $\displaystyle xe^{\frac{x}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n!}x^{n+1},\quad (xe^{\frac{x}{2}})'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n\cdot n!}x^n$

$$(x^2e^{\frac{x}{2}})''=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)(n+1)}{2^n\cdot n!}x^n,\quad(-\infty,\ +\infty)$$

因为 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n\cdot n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(n+2)(n+1)}{2^n\cdot n!}-3\cdot\frac{n+1}{2^n\cdot n!}\right.$

$$\left.+2\cdot\frac{1}{2^n\cdot n!}\right]x^n=(x^2e^{\frac{x}{2}})''-3(xe^{\frac{x}{2}})'+2e^{\frac{x}{2}}$$

所以 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n\cdot n!}x^n=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+1\right)e^{\frac{x}{2}}\qquad(-\infty,\ +\infty)$

例13 求数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^{n-1}}$的和。

[分析] 由级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，$u_n=\frac{n(n+1)}{2^{n-1}}$的形式，我们可考察相应的幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^{n-1}}x^{n-1}$，如果该幂级数在$x=1$点处收敛，则求数项级数的和即为幂级数和函数在$x=1$的值，因此我们只要能求出该幂级数的和函数，问题就可得到解决。

[解] 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(n+2)}{2^n}\cdot\frac{2^{n-1}}{n(n+1)}\right|=\frac{1}{2}$$

故收敛半径$R=2$，因而当$x=1$时幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^{n-1}}x^{n-1}$收敛，以下求和函数。

设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^{n-1}}x^{n-1}$在$[0,x]$，$x\in(-2,2)$上进行两次定积分得

$$\int_0^x\left[\int_0^x S(x)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x=4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}$$

$$=4\cdot\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1-\frac{x}{2}}=\frac{2x^2}{2-x}$$

再对上式两边进行两次微分得

$$S(x)=\frac{(8-4x)(2-x)+2(8x-2x^2)}{(2-x)^3}$$

于是，令$x=1$即得

$$S(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^{n-1}}=\frac{(8-4)(2-1)+2(8-2)}{(2-1)^3}=16$$

注：由数项级数通项的形式，所考察的幂级数并非唯一，比如本题数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^{n-1}}$可看作幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}$在$x=\frac{1}{2}$的和数，容易判别该幂级数的收敛域为$(-1,1)$，且和函数为$S(x)=\frac{2}{(1-x)^3}$，于是得

$$S\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^{n-1}}=\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}=16.$$

§4.3 傅里叶(Fourier)级数

一、基本内容

(1)设$f(x)$是以2π为周期且在$[-\pi,\pi]$上可积的函数，则形如$\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$的级数，其中系数$a_n$、$b_n$由下式确定

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\quad n=0,1,2,\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx,\quad n=1,2,\cdots$$

就称此级数为$f(x)$的傅里叶级数。

特别是，当$f(x)$为奇函数时，$a_n=0$，此时级数称为正弦级数，当$f(x)$为偶函数时，$b_n=0$，此时级数称为余弦级数.

（2）狄里赫莱收敛定理　设$f(x)$是以2π为周期的函数，在$[-\pi,\pi]$上连续或至多只有有限个第一类间断点及有限个极值点，则函数$f(x)$的傅里叶级数收敛且

1）当x是连续点时，级数收敛到$f(x)$；

2）当x是间断点时，级数收敛到

$$\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$$

3）当$x=\pm\pi$时，级数收敛到

$$\frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)]$$

（3）按延拓的思想，可将$[0,\pi]$上满足狄里赫莱定理的函数$f(x)$，展成正弦级数或余弦级数。

（4）按变换的思想，可将以$2l$为周期，在$[-l,l]$上满足狄里赫莱定理的函数$f(x)$展开为傅里叶级数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

其中系数a_n、b_n为

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x,\quad n=0,1,2,\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x,\quad n=1,2,\cdots$$

二、解题示例

例14　将函数$f(x)=\arcsin^{1}(\sin x)$在$[-\pi,\pi]$上展开

为傅里叶级数。

［解］ 函数$f(x)=\arcsin^2(\sin x)$是以2π为周期的偶函数.当$0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$时，$\arcsin(\sin x)=x$，所以$\arcsin^2(\sin x)=x^2$。当$\frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi$时，$\arcsin(\sin x)=\arcsin[\sin(\pi-x)]=\pi-x$，所以，$\arcsin^2(\sin x)=(\pi-x)^2$，因此得

$$f(x)=\begin{cases}(\pi+x)^2, & -\pi\leqslant x<-\frac{\pi}{2}\\ x^2, & -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\\ (\pi-x)^2, & \frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi\end{cases}$$

从而 $b_n=0$，$n=1,2,\cdots$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)^2\mathrm{d}x\right]=\frac{\pi^2}{6}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos nx\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)^2\cos nx\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}[1+(-1)^n]\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}[1+(-1)^n]\left[\frac{\pi^2}{4n}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{2}{n}\left(-\frac{\pi}{2n}\cos\frac{n\pi}{2}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

$$=\begin{cases} 0, & n\text{为奇数} \\ \dfrac{4\cos\dfrac{n\pi}{2}}{n^2}, & n\text{为偶数} \end{cases}$$

所以 $$f(x)\sim\frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n4}{(2n)^2}\cos 2nx$$

$$=\frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos 2nx$$

在$[-\pi,\pi]$上$f(x)$连续，由狄里赫莱定理得

$$f(x)=\arcsin^2(\sin x)=\frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos 2nx,$$

$$[-\pi,\pi]$$

例15 用不同的延拓方式，将函数$f(x)=x^2$在$(0,2)$上展为余弦级数。

［解］ 方式一。在$(-2,2]$上作偶延拓

$$F(x)=x^2,\ x\in(-2,2]$$

$F(x)$是以4为周期的偶函数，于是

$$b_n=0,\ n=1,2,\cdots$$

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 x^2\mathrm{d}x=\frac{8}{3}$$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2 x^2\cos\frac{n\pi}{2}x\mathrm{d}x=\frac{(-1)^n\cdot 8}{(n\pi)^2},\ n=1,2,\cdots$$

所以 $$F(x)\sim\frac{4}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n8}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}x$$

由狄里赫莱定理得

$$F(x)=\frac{4}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 8}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}x,\ (-2\leqslant x\leqslant 2)$$

从而得 $f(x)=x^2=\frac{4}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 8}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}x,\ (0<x<2)$

方式二。在$[-\pi,\pi]$上偶延拓

$$F(x)=x^2,\ (-\pi<x\leqslant\pi)$$

$F(x)$是以2π为周期的偶函数，于是

$$b_n=0,\ n=1,2,\cdots$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{(-1)^n 4}{n^2},\ n=1,2,\cdots$$

所以 $F(x)\sim\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 4}{n^2}\cos nx$

由狄里赫莱定理得

$$F(x)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 4}{n^2}\cos nx,\ (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$$

从而得 $f(x)=x^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 4}{n^2}\cos nx,\ (0<x<2)$

方式三。作偶延拓

$$F(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x\leqslant -2\\ x^2, & -2<x<2\\ 0, & 2\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$$

$F(x)$也是以2π为周期的偶函数，于是

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, \cdots$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^2 x^2\,dx = \frac{16}{3\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^2 x^2\cos nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{4n^2-2}{n^3}\sin 2n + \frac{4}{n^2}\cos 2n\right), \quad n = 1, 2, \cdots$$

所以 $F(x) \sim \frac{8}{3\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^3\pi}[(4n^2-2)\sin 2n$

$+ 4n\cos 2n]\cos nx$

由狄里赫莱定理得

$$\frac{8}{3\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^3\pi}[(4n^2-2)\sin 2n + 4n\cos 2n]\cos nx$$

$$= \begin{cases} F(x), & x \in (-\pi, \pi] \text{但} x \neq \pm 2, \ x \neq \pm\pi \\ 2, & x = \pm 2 \\ 0, & x = \pm\pi \end{cases}$$

从而得

$$f(x) = x^2 = \frac{8}{3\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^3\pi}[(4n^2-2)\sin 2n$$

$$+ 4n\cos 2n]\cos nx, \quad (0 < x < 2)$$

本题说明，同是延拓为偶函数，但延拓形式不同时，展成的余弦级数的形式也不相同。

例16 设函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上为连续的偶函数，且 $f\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$，试证明在 $f(x)$ 展成的余弦级数

中，系数$a_{2n}=0$，$(n=0,1,2,\cdots)$。

[证]

$$a_{2n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos 2nx\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos 2nx\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos 2nx\,\mathrm{d}x\right]$$

对积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos 2nx\,\mathrm{d}x$作变换$x=\frac{\pi}{2}-t$，得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos 2nx\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cos(n\pi-2nt)(-\mathrm{d}t)$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cos(n\pi-2nt)\,\mathrm{d}t$$

对积分$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos 2nx\,\mathrm{d}x$作变换$x=t+\frac{\pi}{2}$，得

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos 2nx\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\cos(n\pi+2nt)\,\mathrm{d}t$$

由已知

$$f\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=-f\left(\frac{\pi}{2}-t\right),\ \cos(n\pi+2nt)=\cos(n\pi-2nt);$$

所以 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos 2nx\,\mathrm{d}x=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos 2nx\,\mathrm{d}x$$

故 $$a_{2n}=0,\ (n=0,1,2,\cdots)$$

例17 设$f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内连续，问函数$f(x)$在$(-\pi,\pi)$内应选择怎样的延拓方式，才能使$f(x)$展开成的傅里叶级数

形状为 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(2n-1)x,\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$?

[解] （1）由于展开式中只有余弦项，故 $f(x)$ 必须作偶延拓，即 $f(-x)=f(x)$。

（2）由于余弦级数中不出现偶数项，故 $A_{2n}=0$，于是

$$A_{2n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos 2nx\mathrm{d}x=0,$$

即

$$\int_0^{\pi}f(x)\cos 2nx\mathrm{d}x=0。$$

由 $\int_0^{\pi}f(x)\cos 2nx\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos 2nx\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\cos 2nx\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos 2nx\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}f(\pi-t)\cos(2n\pi-2nt)(-\mathrm{d}t)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f(x)+f(\pi-x)]\underline{\cos 2x}\mathrm{d}x=0$$

得

$$-f(\pi-x)=f(x)$$

因此，选择的延拓方式应满足 $f(-x)=f(x)$，且 $f(\pi-x)=-f(x)$ 时，才能符合题意要求.

令 $A_{2n-1}=a_n(n=1,2,\cdots)$，便有

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(2n-1)x,\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

例18 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数，a_n、b_n 是傅里叶系数，求函数 $F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t$ 的傅里叶系数

A_n、B_n，并利用这个展开式证明帕塞法尔等式：

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x$$

〔解〕 先讨论函数 $F(x)$ 的连续性、周期性、奇偶性，然后再计算 A_n、B_n。

$\forall x\in R$ 有

$$\Delta F=F(x+\Delta x)-F(x)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)[f(x+\Delta x+t)-f(x+t)]\mathrm{d}t$$

由 $f(x)$ 的连续性得 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta F=0$，故 $F(x)$ 是连续函数。

$$F(x+2\pi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+2\pi+t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t=F(t)$$

故 $F(x)$ 也是以 2π 为周期的连续函数。

$$F(-x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(-x+t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}f(y+x)f(y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)f(x+y)\mathrm{d}y=F(x)$$

所以 $F(x)$ 是一偶函数。于是 $F(x)$ 的傅里叶系数 $B_n=0$，$n=1,2,\cdots$。

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\,\mathrm{d}t\right]\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\int_{-\pi}^{\pi}f(t+x)\cos nx\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t$$

变换$t+x=y$，注意到$f(x)$的周期性，有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t+x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\cos(ny-nt)\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\pi}\cos nt\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\cos nz\,\mathrm{d}y+\frac{1}{\pi}\sin nt\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\sin ny\,\mathrm{d}y$$

$$=a_n\cos nt+b_n\sin nt$$

因此 $$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\pi}a_n\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}b_n\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t$$

$$=a_n^2+b_n^2\qquad n=0,1,2,\cdots$$

从而有

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\,\mathrm{d}t=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nx$$

$$=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\cos nx$$

上式中，只要令$x=0$即得帕塞法尔等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(t)]^2\mathrm{d}t=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

例19 将函数 $f(x)=\left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2$ 在$[0,2\pi]$上展开成傅里叶级数，并由此推证$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$。

[解]

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{6}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n^2},\quad n=1,2\cdots$$

$$b_n=0,n=1,2,\cdots$$

于是 $f(x)=\left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2},0\leqslant x\leqslant 2\pi$

由于 $f(x)=\left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2$ 连续，帕塞法尔等式成立：

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

由 $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi-x}{2}\right)^4\mathrm{d}x$

$$=-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{\pi-x}{2}\right)^5\Big|_0^{2\pi}=\frac{\pi^4}{40}$$

所以就有

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{40}$$

即得 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

自 我 测 试 题

1. 判别下列级数的敛散性：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}\sin\frac{1}{n}$　　（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^n x\,dx$

2. 求下列级数的收敛域：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x^n+\frac{1}{2^n x^n}\right)$

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$

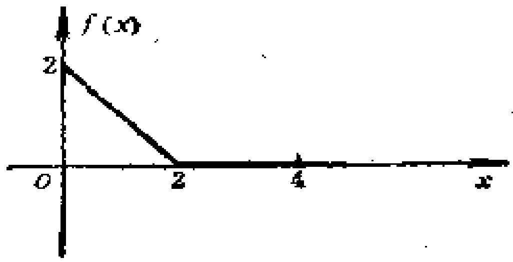
3. 将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+7}$ 按 $x+2$ 的方幂展为幂级数。

4. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{\ln n}$。

5. 设 $a_n\geqslant 0$，且$\{na_n\}$有界，证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛。

6. 求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}$的和函数。

7. 设定义在$[0,4]$上的函数 $f(x)$ 如下图，试将其展开成正弦级数。



8. 已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$均收敛。证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛，且$\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n\right)^2\leqslant\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2\right)\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2\right)$。

9. 设$\{a_n\}$单调下降，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，证明下面的级数收敛：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$$

10. 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$，证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a_n}}$，当$l>1$时收敛，当$l<1$时发散。并讨论$l=1$时情况如何？

11. 利用$f(x)=x^2$在$[-\pi,\pi]$上的傅里叶级数证明：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi}{6}$　（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$

12. 设函数$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上可积，a_n、b_n是$f(x)$的傅里叶系数。试证：对任意自然数n，有

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x$$

提示与答案

1. （1）发散；　（2）发散；　（3）发散

2. （1）$-1<x<-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}<x<1$；

　（2）$-1<x<1$

3. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+2)^{2n}}{3^{n+1}}$，$-2-\sqrt{3}<x<-2+\sqrt{3}$

4. 1

5. 由已知创造条件，用比较法。

6. $f(x)=2x\operatorname{arctg}x-\ln(1+x^2)$，$|x|\leqslant 1$

7. $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n\pi}-\frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right)\sin\frac{n\pi x}{4}$$

$$=\begin{cases}2-x, & 0<x<2\\ 0, & 2\leqslant x\leqslant 4,\ x=0\end{cases}$$

12. $S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$，由 $0\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2dx$ 计算积分。

第五章 微分方程

微分方程包括建立方程和求解两个方面。建立微分方程主要根据导数或微分的几何、物理等实际意义与公式，通过对实际问题的具体分析，求得含有未知函数导数的等式。解微分方程主要是根据微分方程的特点和类型，寻求适合它的解法从而得到满足方程的未知函数。本章主要介绍一阶微分方程和特殊的二阶微分方程的解法。

一阶微分方程中，变量可分离的方程是基础，齐次方程、一阶微分方程、贝努利（Bernoulli）方程最后都归结为变量可分离的方程。全微分方程是极特殊的一阶微分方程，利用曲线积分与路径无关的等价条件，可直接写出全微分方程的通解。

对于二阶线性微分方程的求解问题，理论基础是通解结构定理。在这个理论指导下，求二阶常系数齐次线性方程的通解，归结为求它的特征方程（二次代数方程）的解；求二阶常系数非齐次线性方程的通解，归结为求它的一个特解及相应齐次方程的通解。一般只对于自由项的几种常见函数给出求特解的一般方法。

§5.1 一阶微分方程解法图表

方　程　类　型	解法与解的表达式
(1)变量可分离的方程 $M_1(x)M_2(y)\mathrm{d}x+N_1(x)N_2(y)\times\mathrm{d}y=0$	$\int\frac{M_1(x)}{N_1(x)}\mathrm{d}x+\int\frac{N_2(y)}{M_2(y)}\mathrm{d}y=C$ 其中C为积分常数
(2)齐次方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=F\left(\frac{y}{x}\right)$ 一般设$F\left(\frac{y}{x}\right)\neq\frac{y}{x}$ 当$F\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{y}{x}$时即为(1)	设　$y=v(x)x$　$\left(v=\frac{y}{x}\right)$ $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=v+x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$，代入原方程 $x\mathrm{d}v=[F(v)-v]\mathrm{d}x$ $\ln x=\int\frac{\mathrm{d}v}{F(v)-v}+\ln C$
(3)一阶线性方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$ $Q(x)=0$	通解形式 $y=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$ $y=Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$
(4)贝努利方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^{n}$ $(n\neq0,1)$	令　$z=y^{1-n}$化为线性方程 $\frac{1}{1-n}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+P(x)z=Q(x)$ 或　$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-n)P(x)z=(1-n)\times Q(x)$ 求出通解后再用y^{1-n}代替z。
(5)全微分方程 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$ 其中P与Q满足 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$	存在函数$u(x,y)$，使 $\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$，解得 $u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)\mathrm{d}y+C$

续 1

方　程　类　型	解法与解的表达式
(6)可将y解出的方程 $y=F(x,y')$	两端对x求导，令 $P=\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$　得 $\left(P-\frac{\partial F}{\partial x}\right)\mathrm{d}x-\frac{\partial F}{\partial P}\mathrm{d}P=0$ 若此方程的解为 $x=\psi(P,C)$或$P=\varphi(x,C)$ 则原方程的解为 $\begin{cases}x=\psi(P,C)\\ y=F(\psi(P,C),P)\end{cases}$ 或　$y=F(x,\varphi(x,C))$
(7)拉格朗日(Legrange)方程 $y=xf_1(y')+f_2(y')$ 其中f_1, f_2是已知可微函数。	属于情形(6)，可化为x的线性方程 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}P}=\frac{f_1'(P)}{P-f_1(P)}x+\frac{f_2'(P)}{P-f_1(P)}$ 可由(3)求解。
(8)克莱罗(Clairaut)方程 $y=xy'+\varphi(y')$ 其中φ为已知可微函数．	属于情形(6)，其解的形式为 $y=Cx+\varphi(C)$ * 注：此方程可能有奇解．
(9)可将x解出的类型 $x=F(y,y')$	两边对x求导，利用$y''=P\cdot\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}$ 其中$P=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$得 $\left(P\frac{\partial F}{\partial y}-1\right)\mathrm{d}y+P\left(\frac{\partial F}{\partial P}\right)\mathrm{d}P=0$ 如果此方程的通解为 $y=\varphi(P,C)$　或$P=\psi(y,C)$ 则原方程通解为 $\begin{cases}x=F(\varphi(P,C),C)\\ y=\varphi(P,C)\end{cases}$ 或　$x=F(y,\psi(y,C))$

续 2

方　程　类　型	解法与解的表达式
(10)不显含未知函数的方程 $F(x,y')=0$	引入参数t，化原方程为 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y'=\psi(t)\end{cases}$ 其解为 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\int\psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t+C\end{cases}$
(11)不显含自变量的方程 $F(y,y')=0$	引入参数t，化原方程为 $\begin{cases}y=\varphi(t)\\ y'=\psi(t)\end{cases}$ 其解为 $\begin{cases}x=\int\dfrac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\mathrm{d}t+C\\ y=\varphi(t)\end{cases}$
(12)可化为变量可分离或齐次方程的方程 (i)$y'=F(ax+by+C)$ (ii)$y'=F\left(\dfrac{a_1x+b_1y+C_1}{a_2x+b_2y+C_2}\right)$	(i)设$z=ax+by+C$ 可得$z'=a+bF(z)$ 属于(1) (ii)若 $\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq0$ 令　$\xi=x+\alpha$ $\eta=y+\beta$ 其中α,β满足方程组 $\begin{cases}a_1\alpha+b_1\beta-C_1=0\\ a_2\alpha+b_2\beta-C_2=0\end{cases}$ 化为齐次方程 $\dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}=F\left(\dfrac{a_1\xi+b_1\eta}{a_2\xi+b_2\eta}\right)$ 若$\Delta=0$，$b_1\neq0$令： $z=a_1x+b_1y+C_1$ 若$\Delta=0$　$b_2\neq0$令： $z=a_2x+b_2y+C_2$ 方程化为(1)。

§5.2 二阶线性微分方程解的结构定理

设二阶齐次线性方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \qquad (\mathrm{I})$$

与二阶非齐次线性方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x) \qquad (\mathrm{II})$$

（1）若y_1与y_2是齐次方程（Ⅰ）的两个线性无关的解，则$y=c_1y_1+c_2y_2$（c_1，c_2是任意常数）是齐次方程（Ⅰ）的通解。

（2）若y^*是非齐次方程（Ⅱ）的一个特解，$c_1y_1+c_2y_2$是对应齐次方程（Ⅰ）的通解，则$y=c_1y_1+c_2y_2+y^*$是非齐次方程（Ⅱ）的通解。

（3）设非齐次方程（Ⅱ）的自由项$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$，而y_1^*与y_2^*分别是方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)$$

与

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_2(x)$$

的特解，则$y_1^*+y_2^*$是原方程（Ⅱ）的特解。

§5.3 二阶常系数齐次线性方程解法图表

齐次方程		特征方程
$y''+py'+q=0$		$r^2+pr+q=0$
特征方程判别式	根r_1及r_2	齐次方程通解
$\Delta=p^2-4q>0$	有两个不相等实根r_1、r_2 $(r_1\neq r_2)$	$y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$
$\Delta=p^2-4q=0$	有二相等实根 $(r_1=r_2)$	$y=(c_1+c_2x)e^{r_1x}$
	有一对共轭复根 $r_1=\alpha+i\beta$ $r_2=\alpha-i\beta$	$y=e^{\alpha x}[c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x]$

§5.4 二阶常系数非齐次线性方程

由非齐次线性方程解的结构定理知，解这类方程，关键是求它的一个特解。一般来说，求特解的方法有二：一是用常数变易法，二是用待定系数法。

一、常数变易法

假定已知相应的齐次方程的通解为$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$，则非齐次方程的一个特解可令为$y^*=c_1(x)y_1(x)$

$+c_2(x)y_2(x)$，其中 $c_1(x)$、$c_2(x)$ 是待定函数，满足方程组

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x)+c_2'(x)y_2(x)=0 \\ c_1'(x)y_1'(x)+c_2'(x)y_2'(x)=f(x) \end{cases}$$

解方程组得到

$$c^1(x)=\int\frac{-y_2(x)f(x)}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}dx, c_2(x)=\int\frac{y_1(x)f(x)}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}dx$$

于是得特解

$$y^*=-y_1(x)\int\frac{y_2(x)f(x)}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}dx$$

$$+y_2(x)\int\frac{y_1(x)f(x)}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}dx$$

二、待定系数法

若方程的非齐次项 $f(x)$ 为形状：$f(x)=e^{\lambda x}(P_m(x)\ \cos\beta x+Q_n(x)\sin\beta x)$ 时：常用待定系数法求特解。其中 $P_m(x)$、$Q_n(x)$ 分别是 m、n 次多项式。

二阶常系数非齐次线性方程解法图表：

	非 齐 次 方 程	非齐次方程通解
	$y''+py'+qy=f(x)$	$y=Y+y^*$ Y——对应齐次方程通解 y^*——非齐次方程特解

续表

	非 齐 次 方 程	非齐次方程通解
	$f(x)$	非齐次方程特解 y^*
非齐次方程的特解	为一般函数	$y^*=-y_1\int\frac{y_2f(x)}{\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}}\mathrm{d}x+y_2\int\frac{y_1f(x)}{\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}}\mathrm{d}x$
	$p_n(x)$—— n次多项式	（1）当$q\neq0$时，$y^*=Q_n(x)$—n次多项式 （2）当$q=0,p\neq0,y^*=xQ_n(x)$ （3）当$p=q=0,y^*=x^2Q_n(x)$
	$p_n(x)e^{\lambda x}$	λ不是特征方程的根$y^*=Q_n(x)e^{\lambda x}$ λ是特征方程的单根$y^*=xQ_n(x)e^{\lambda x}$ λ是特征方程的重根$y^*=x^2Q_n(x)e^{\lambda x}$
	$a\cos\lambda x+b\sin\lambda x$ ——a、b、λ是常数	$\pm\lambda i$不是特征方程的根 $y^*=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x$，$A$、$B$常数 $\pm\lambda i$是特征方程的根 $y^*=x(A\cos\lambda x+B\sin\lambda x)$
	$e^{\lambda x}(p_n(x)\cos\alpha x+p_m(x)\sin\alpha x)$ $p_m(x)$—m次多项式	$\lambda\pm i\beta$不是特征方程的根 $y^*=e^{\lambda x}[Q_n(x)\cos\alpha x+Q_m(x)\times\sin\alpha x]$ $Q_m(x)$—m次多项式 $\lambda\pm i\beta$是特征方程的根 $y^*=xe^{\lambda x}[Q_n(x)\cos\alpha x+Q_m(x)\times\sin\alpha x]$

几种特殊类型可降阶的高阶方程

§5.5 可降阶的微分方程

1. $y^{(n)}=f(x)$型

可通过连续n次积分求解。

$$y=\int\cdots\int f(x)\,\mathrm{d}x\cdots\mathrm{d}x+c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}+\cdots+c_n$$

2. $y''=f(y)$型(不显含x，y'型)

用$2y'\mathrm{d}x=2\mathrm{d}y$乘以方程两边，化为全微分方程：$\mathrm{d}(y')^2=2f(y)\mathrm{d}y$

解为

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2\int f(y)\mathrm{d}y+c_1}}=\pm x+c_2$$

3. $y''=f(x,y')$型(不显含y)

令$y'=p$则方程化为

$p'=f(x,p)$方程降为一阶的，求得p，从而可得原方程的解。

4. $y''=f(y,y')$型(不显含x)

令 $y'=p$而$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot p$，方程化为：$p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p)$求出$p$，进一步可解得$y$。

5. $F(x,y^{(n-k)},y^{(n-k+1)},\cdots y^{(n)})=0$型

令$z=y^{(n-k)}$原方程转化为k阶方程

$$F(x,z,z',\cdots z^{(k)})=0$$

若求得解为$z=(x,c_1,c_2,\cdots c_k)$那末再解$y^{(n-k)}=\varphi(x,c_1,c_2\cdots c_n)$使得原方程的通解。

6. $F(x,y^{(n)})=0$型

若能将$y^{(n)}$表示出来，则方程化为 1 型，若不能将$y^{(n)}$表示出来，或解出$y^{(n)}$太复杂，设法求其参数方程的解。

设函数$\varphi(t),\psi(t)$，$(\alpha<t<\beta)$满足

$$F(\varphi(t),\psi(t))\equiv 0$$

则原方程可写成参数方程形式

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y^{(n)}=\psi(t) \end{cases}$$

由$dy^{(n-1)}=y^{(n)}dx=\psi(t)\cdot\varphi'(t)dt$得

$$y^{(n-1)}=\int\psi(t)\varphi'(t)dt+c_1=\psi_1(t,c_1)$$

又由$dy^{(n-2)}=y^{(n-1)}dx=\psi_1(t,c_1)\cdot\varphi'(t)dt$

又得 $y^{(n-2)}=\int\psi_1(t,c_1)\cdot\varphi'(t)dt+c_2=\psi_2(t,c_1,c_2)$

最后得参数形式的解

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi_n(t,c_1,c_2,\cdots,c_n) \end{cases}$$

7. $F(y^{(n-1)},y^{(n)})=0$型

（i）若可从方程中解出$y^{(n)}=f(y^{(n-1)})$，可令$z=y^{(n-1)}$，将方程化为$z'=f(z)$，设其解为

$z=z(x,c_1)$，则化为 1 型

$y^{(n-1)}=z(x,c_1)$，再连续积分$n-1$次得解。

（ii）若不能将$y^{(n)}$解出，而原方程的参数形式如下：
$y^{(n-1)}=\varphi(t)$，$y^{(n)}=\psi(t)$，则从$dy^{(n-1)}=y^{(n)}dx$得

$$x=\int\frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}+c,\quad y^{(n-1)}=\varphi(t)$$

由类型 6 可知通解为

$$x=\int\frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)}+c,\quad y=\varphi_{n-1}(t,c_1,c_2,\cdots,c_{n-1})$$

§5.6 欧拉方程(Euler)

称形如

$$x^n y^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}xy'+a_ny=f(x)$$

的变系数线性微分方程为欧拉方程。这是一类常见的较为重要的方程，利用变换 $x=e^t$ 可以化为 n 阶常系数线性方程，其解法与二阶常系数线性方程相同。

解 题 示 例

例 1 求 $y'=\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2(x+2y)$ 的通解。

［分析］ 本题不属于图表中列出的一阶微分方程形式，但利用变量代换 $u=x+2y$ 可将原方程化为可分离变量的方程。这表明，变量代换可以解决相当一部分微分方程的求解问题。

方程未知类型 $\xrightarrow{\text{变量代换}}$ 方程已知可解类型

事实上，图表中列出的齐次微分方程，贝努利方程以及可化为齐次方程的一些微分方程的解法就是利用了变量代换的思想，这是一种常用的思考问题的方法。

［解］ 设 $u=x+2y$，则 $u'=1+2y'$，代入原方程得

$$u'=1+\mathrm{tg}^2u=\sec^2u$$

分离变量并积分，得通解为

$$\frac{1}{4}\sin 2(x+2y)+\frac{1}{2}(x+2y)=x+c$$

即 $$y=-\frac{1}{4}\sin 2(x+2y)+c\cancel{\frac{x}{2}}+\frac{x}{2}$$

例 2 设 $y'=\frac{y}{x}+\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$。试问 $\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ 为怎样的函数，才能使给定的方程有通解 $y=x/\ln cx$

［分析］ 本题是齐次方程，常规的做法是可由原题求出通解，再与 $y=\frac{x}{\ln cx}$ 相比较即可。

［解法 1］ 令 $u=\frac{y}{x}$，$y'=u+xu'$，代入原方程可得

$$u+u'x=u+\varphi\left(\frac{1}{u}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\varphi\left(\frac{1}{u}\right)}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

故通解为

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\varphi\left(\frac{1}{u}\right)}=\ln cx$$

由于 $y=\frac{x}{\ln cx}$ 是原方程的通解，即 $u=\frac{y}{x}=\frac{1}{\ln cx}$ 为上述方程的通解，故有

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\varphi\left(\frac{1}{u}\right)}=\frac{1}{u},\quad \varphi\left(\frac{1}{u}\right)=-u^2$$

即 $\varphi\left(\frac{x}{y}\right)=-\frac{y^2}{x^2}$，因此有

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right)=-\frac{x^2}{y^2}$$

[解法 2] 将通解 $y=\frac{x}{\ln cx}$ 代入方程 $y'=\frac{y}{x}+\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$，得

$$\frac{\ln cx-1}{(\ln cx)^2}=\frac{1}{\ln cx}+\varphi\left(\frac{1}{\ln cx}\right)$$

$$\varphi\left(\frac{1}{\ln cx}\right)=\frac{-1}{(\ln cx)^2}$$

即 $\varphi(x)=-\frac{1}{x^2}$，$\varphi\left(\frac{y}{x}\right)=-\frac{x^2}{y^2}$。

例 3 求 $(5x^2y^3-2x)y'+y=0$ 的通解。

[分析] 本题不属于上述表中基本类型．可考虑交换 x 与 y 的位置，再考察新方程的类型。

[解] 交换 x 与 y 的地位，可得新方程

$$-y\frac{dx}{dy}+2x=5x^2y^3$$

为 $n=2$ 的贝努利方程。令 $z=\frac{1}{x}$，则将其化为

$$y\frac{dz}{dy}+2z=5y^3$$

即一阶线性方程，用求解公式可求出

$$z=cy^{-2}+y^3$$

故

$$\frac{1}{x}=cy^{-2}+y^3$$

为原方程的通解。

例 4 设$f(x)$在$[1,+\infty)$内具有连续导数，且满足方程

$$x\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t=(x+1)\int_1^x tf(t)\,\mathrm{d}t,\qquad f(1)=1$$

求函数$f(x)$。

[分析] 例 4 给出了一个含有可变上限积分的方程。根据此方程求未知函数$f(x)$，其通常方法是先化掉积分形式。常用的方法是对给定的方程两端关于x求导。

[解] 方程两边对x两次求导，可将原方程化为

$$x^2f'(x)=(-3x+1)f(x)$$

这是可分离变量的方程，又可化为

$$\frac{\mathrm{d}f}{f}=\left(-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$

两边积分并整理得

$$\ln f\cdot\frac{x^3}{c}=-\frac{1}{x}$$

$$f(x)=cx^{-3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$$

$x=1$时，$\quad 1=c\cdot\mathrm{e}^{-1}\quad c=\frac{1}{\mathrm{e}}$。所以

$c=e$

$$f(x)=\frac{1}{\cancel{\mathrm{e}x^3\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}}\qquad \frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}+1}$$

例 5 解方程

$$y\,\mathrm{d}x+(x^2y-x)\,\mathrm{d}y=0$$

[分析] 由于

$$\frac{\partial p}{\partial y}=1,\qquad\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=2xy-1$$

所以
$$\frac{\partial p}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$$
非全微分方程。用分组法，将方程改写为
$$x^2y\,\mathrm{d}y-(x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x)=0$$
注意到微分公式
$$\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2}=\frac{1}{x^2}(x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x)$$
于是可求解。

〔解〕 用x^2除方程两边，变为
$$y\,\mathrm{d}y-\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)=0$$
通解为
$$\frac{1}{2}y^2-\frac{y}{x}=c$$
在这里利用了积分因子$\mu=\frac{1}{x^2}$。为找积分因子，常用的微分公式还有
$$\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{y^2}$$
$$\mathrm{d}(xy)=x\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}(x^2+y^2)=2(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y)$$
$$\mathrm{d}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)=\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$
$$\mathrm{d}\left(\ln\frac{x}{y}\right)=\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{xy}$$
从这些微分公式可以看出，象$y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y=0$这样一个微分

方程就有$\frac{1}{x^2}$、$\frac{1}{y^2}$、$1/(x^2+y^2)$和$1/xy$等都可以做它的积分因子，因而可以照此用多种不同的方法来求解。

例 6 求解$y\mathrm{d}x-(x^3y+x)\mathrm{d}y=0$。

[分析] 若仍用上例的方法，则方程变形为$\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)+xy\mathrm{d}y=0$，不能直接求出通解。对于这种情况，引入适当的变换$z=\frac{y}{x}$即可。

[解] 因为原方程$y\mathrm{d}x-(x^3y+x)\mathrm{d}y=0$可化为

$$\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)+xy\mathrm{d}y=0$$

令$z=\frac{y}{x}$，则得

$$\mathrm{d}z+\frac{y^2}{z}\mathrm{d}y=0$$

$$z\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}y=0$$

$$\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}y^3=c$$

即得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2+\frac{1}{3}y^3=c \quad 或x=0$$

例 7 若对平面上任何简单闭曲线L，恒有

$$\oint_L\{2xyf(x^2)\mathrm{d}x+[f(x^2)-x^4]\mathrm{d}y\}=0$$

其中$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内具有连续的一阶导函数，且$f(0)=$

2，试求$f(x)$。

［分析］ 这是一个综合题，曲线积分与路径无关的充要条件的利用是关键之一。然后利用一个微分方程求未知函数。

［解］ 因为 $p=2xyf(x^2)$，$Q=f(x^2)-x^4$

令 $$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}，得$$

$$2xf(x^2)=f'(x^2)2x-4x^3$$

或

$$\frac{\mathrm{d}f(x^2)}{\mathrm{d}x}-2xf(x^2)=4x^3 \qquad (*)$$

这是一阶线性非齐次微分方程，解得

$$f(x^2)=-2(x^2+1)+c_1\mathrm{e}^{x^2}$$

由于$f(0)=2$，定出$c_1=4$。故得函数

$$f(x)=-2(x+1)+4\mathrm{e}^x$$

注：对于一阶线性方程（$*$），令$y=f(x^2)$，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2xy=4x^3$$

如果记不起通解公式，可用常数变易法解之。

先解$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2xy=0$时（对应齐次方程），分离变量便得其解$y=c\mathrm{e}^{x^2}$。

再设原方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2xy=4x^3$解为$y=C(x)\mathrm{e}^{x^2}$，代入方程得$C'(x)=4x^3\cdot\mathrm{e}^{-x^2}$，所以

$$C(x)=-2(x^2+1)\mathrm{e}^{-x^2}+c$$
$$y=C(x)\mathrm{e}^{x^2}=-2(x^2+1)+c\mathrm{e}^{x^2}$$

即

$$f(x^2)=-2(x^2+1)+c_1\mathrm{e}^{x^2}$$

同前所做，得

$$f(x)=-2(x+1)+4\mathrm{e}^x$$

例 8 求微分方程

$$y''+y'-2y=\cos x-3\sin x-2$$

的通解。

[解] 应用微分方程解的结构定理，对应齐次方程 $y''+y'-2y=0$ 的特征方程为

$$\lambda^2+\lambda-2=0$$

特征根为

$$\lambda_1=1,\quad \lambda_2=-2$$

故齐次方程通解 $y=c_1e^x+c_2e^{-2x}$

再设原方程有一特解

$$y^*=a\cos x+b\sin x+c$$

其中a、b、c为待定系数。将 y^* 求一阶及二阶导数后代入原方程可得

$$\begin{cases}-3a+b=1\\-3b-a=-3\\c=1\end{cases}$$

所以$a=0,b=1,c=1$。即

$$y^*=\sin x+c$$

从而原方程通解为

$$y=c_1e^x+c_2e^{-2x}+\sin x+1$$

例 9 解方程 $y=x+y'-\ln y'$。

[分析] 这是导数未解出的类型，但y 已解出，属于一阶微分方程中的类型(6)，引入参数 $p=\dfrac{dy}{dx}$：$y=x+p-\ln p$，

两边对 x 求导得 $(p-1)=\dfrac{p-1}{p}p'$

[解] 方程两端对x求导，令$p=\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 得

$$(p-1)=\frac{p-1}{p}p'$$

（1）若$p\neq1$，则约去$p-1$有

$$\mathrm{d}x=\mathrm{d}p/p$$

故 $$\begin{cases}x=\ln p+c\\ y=p+c\end{cases}\quad \text{或}\quad y=e^{x-c}+c$$

（2）$p=1$，代入原式$y=x+\varphi-\ln p$得解

$$y=x+1$$

注：如果在等式$p=1$中仍以y'代替p则是错误的，因为积分之后得到$y=x+c$.

例10 解方程 $2yy''=y'^2+1$.

[分析] 该方程为高阶方程，方程里没出现x，属于§5.5中的类型3.

[解] 设$y'=p(y)$

$$y''=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p(y)}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p'p$$

将$y'=p$，$y''=pp'$代入方程得

$2ypp'=p^2+1$，方程已经被降阶，解所得到的方程，求出$p=\pm\sqrt{cy-1}$，因此

$$y'=\pm\sqrt{cy-1}$$

由此可得 $4(cy-1)=c^2(x+c_2)^2$

例11 解方程$(4x-1)^2y''-2(4x-1)y'+8y=0$.

[解] 这是Euler方程，因此可令

$$4x-1=\mathrm{e}^t$$

有$\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$， $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=4\mathrm{e}^{-t}$，因此有

$$y'_{(x)}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=4\mathrm{e}^{-t}\cdot y'_{(t)}$$

$$y''_{(x)}=16\mathrm{e}^{-2t}(y''_{(t)}-y'_{(t)})$$

于是原方程化为

$$16\mathrm{e}^{2t}\cdot\mathrm{e}^{-2t}(y''_{(t)}-y'_{(t)})-4\cdot2\mathrm{e}^{t}\cdot\mathrm{e}^{-t}\cdot y'_{(t)}+8y=0$$

即 $$2y''_{(t)}-3y'_{(t)}+y=0$$

通解为 $y=c_1\mathrm{e}^{t}+c_2\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}$

或 $y=c_1(4x-1)+c_2\sqrt{4x-1}$

例12 解方程 $x^3+y'^3-3xy'=0$。

［分析］ 这是属于 $F(x,y')=0$ 型方程，从方程中很难将x或y'求出，我们采用参数方法来解决。

［解］ 引入参数 $\begin{cases} x=\dfrac{3t}{1+t^3} \\ y'=\dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$

由

$$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=\frac{3t^2}{1+t^3}\cdot\frac{3(1+t^3)-9t^3}{(1+t^3)^2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{9t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3}\mathrm{d}t$$

得方程的解为： $$x=\frac{3t}{1+t^3}$$

$$y=\int\frac{9t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3}\mathrm{d}t+c$$

或 $$\begin{cases} x=\dfrac{3t}{1+t^3} \\ y=\dfrac{12t^3+3}{2(1+t^3)^2}+c \end{cases}$$

例13 求微分方程 $y''+y=x^2+\text{tg}x$ 的通解.

[解] 特征方程 $r^2+1=0$ $r_{1,2}=\pm i$

$$y_c=c_1\cos x+c_2\sin x$$

先求 $y''+y=x^2$ 的特解:

$$y_1^*=Ax^2+Bx+C\ ,y_1^{*''}=2A,\ Ax^2+Bx+C+2A=x^2$$

所以 $A=1,\quad C=-2$

$$y_1^*=x^2-2$$

再求 $y''+y=\text{tg}x$ 的特解。

用常数变易法:

$$y_2^*=c_1(x)\cos x+c_2(x)\sin x$$

$$\begin{cases}c_1'(x)\cos x+c_2'(x)\sin x=0\\ -c_1'(x)\sin x+c_2'(x)\cos x=\text{tg}x\end{cases}$$

$$c_1'(x)=\cos x-\sec x\quad c_2'(x)=\sin x$$

$$c_1(x)=\sin x-\ln(\sec x+\text{tg}x)\quad c_2(x)=-\cos x$$

$$\therefore\quad y_2^*=c_1(x)\cos x+c_2(x)\sin x$$

$$=-\cos x\ln(\sec x+\text{tg}x)$$

故原方程通解为 $y=y_c+y_1^*+y_2^*$

$$=c_1\cos x+c_2\sin x+x^2-2$$

$$-\cos x\ln(\sec x+\text{tg}x)$$

例14 求 $\dfrac{dy}{dx}+y=Q(x)$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=0$ 的连续解，其中

$$Q(x)=\begin{cases}2\quad,\ 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\quad,\ x>1\end{cases}$$

[解] 利用通解公式

$$y=e^{-\int 1dx}\left[\int Q(x)e^{\int 1dx}dx+c\right]=e^{-x}\left[\int Q(x)e^{x}dx+c\right]$$

$$=\begin{cases}e^{-x}(2e^{x}+c_1), & 0\leqslant x\leqslant 1\\ c_2e^{-x}, & x>1\end{cases}$$

由$y|_{x=0}$，得$c_1=-2$，从而

$$y|_{x=1}=e^{-x}(2e^{x}-2)|_{x=1}=2-2e^{-1}$$

又

$$\lim_{x\to 1+0}y(x)=\lim_{x\to 1+0}c_2e^{-x}=c_2e^{-1}$$

因y在$x=1$连续，故得$c_2=2e-2$。所求解为

$$y=\begin{cases}2-2e^{-x}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ (2e-2)e^{-x}, & x>1\end{cases}$$

例15 求微分方程

$$y''+y=x,\ \text{当}x<\frac{\pi}{2},\quad y''+4y=0,\ \text{当}x>\frac{\pi}{2}$$

满足初始条件$y|_{x=0}=0$，$y'|_{x=0}=0$，并在$x=\frac{\pi}{2}$处连续且可微的解。

［解］ 因$y''+y=0$的通解$Y=c_1\cos x+c_2\sin x$，设$y''+y=x$的特解为$y^*=ax+b$，代入求得$a=1$，$b=0$。于是$y''+y=x$的通解$y=c_1\cos x+c_2\sin x+x$，由初始条件$y|_{x=0}=0$，$y'|_{x=0}=0$，得$c_1=0$，$c_2=-2$，所求解

$$y=-\sin x+x,\qquad \left(x<\frac{\pi}{2}\right)$$

由于所求解要在$x=\frac{\pi}{2}$连续且可微，求出$y|_{x=\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$，$y'|_{x=\frac{\pi}{2}}=1$，再解

$$\begin{cases} y''+4y=0 \\ y\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1 \\ y'\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=1 \end{cases}$$

得 $y=\left(1-\frac{\pi}{2}\right)\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x$

因此所要的解为

$$y=\begin{cases} -\sin x+x, & x\leqslant\frac{\pi}{2} \\ \left(1-\frac{\pi}{2}\right)\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x, & x>\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

例16 已知二阶非齐次线性方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$$

的三个特解

$y_1^*=x-(x^2+1)$，$y_2^*=3e^x-(x^2+1)$，$y_3^*=2x-e^x-(x^2+1)$求该方程满足$y(0)=0$，$y'(0)=0$的特解。

［解法 1］ 由于

$$y_1=y_2^*-y_1^*=3e^x-x,\quad y_2=y_3^*-y_1^*=x-e^x$$

是对应齐次方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$的解，且它们线性无关（$y_1/y_2\neq c$）。应用解的结构定理，非齐次方程$y''+P(x)\cdot y'+Q(x)y=f(x)$的通解

$$y=c_1(3e^x-x)+c_2(x-e^x)+x-(x^2+1)$$

由$y(0)=0$，$y'(0)=0$，定出$c_1=-\frac{1}{2}$，$c_2=\frac{3}{2}$，故所求解为

$$y=-\frac{1}{2}(3e^x-x)+\frac{3}{2}(x-e^x)+x-(x^2+1)$$

$$=e^x-x^2-x-1$$

［解法 2］ 设所求特解

$$y=c_1y_1^*+c_2y_2^*+c_3y_3^*$$

$$=c_1(x-x^2-1)+c_2(3e^x-2x)+c_3(2-e^x-2x)$$

且$c_1+c_2+c_3=1$。

由初始条件$y(0)=0, y'(0)=0$，得

$$\begin{cases}-c_1+2c_2-2c_3=0\\ c_1+3c_2+c_3=0\end{cases}$$

并注意条件$c_1+c_2+c_3=1$，解之，得

$$c_1=4,\quad c_2=-\frac{1}{2},\quad c_3=-\frac{5}{2}$$

于是

$$y=4(x-x^2-1)-\frac{1}{2}(3e^x-x^2-1)$$

$$-\frac{5}{2}(2x-e^x-x^2-1)=e^x-x^2-x-1$$

例17 在上半平面求一条向上凹的曲线，其上任一点$P(x,y)$处的曲率等于此曲线在该点的法线段PQ（Q是法线与x轴的交点）长度的倒数，且曲线在点(1,1)处的切线与x轴平行。

［解］ 曲线$y=y(x)$在点(x,y)处的法线方程

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x),(y'\neq0)$$

它与x轴的交点$Q(x+yy',0)$，于是PQ的长度是

$$\sqrt{(yy')^2+y^2}=y\sqrt{1+y'^2},\ (y'=0\text{也满足该式})$$

依题意，得微分方程

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{1}{y(1+y'^2)^{1/2}}$$

即$yy''=1+y'^2$，且满足条件当$x=1$时，$y=1$，$y'=0$。

令 $y'=P$，$y''=P\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}$，得

$$yP\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}=1+P^2$$

$$\frac{P}{1+P^2}\,\mathrm{d}P=\frac{\mathrm{d}y}{y}$$

积分并注意到$y=1$时$P=0$，便得

$$y=\sqrt{1+P^2}$$

代入$y'=P$，得

$$y'=\pm\sqrt{y^2-1},\quad \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2-1}}=\pm\mathrm{d}x$$

积分并注意$x=1$时$y=1$，得

$$\ln(y+\sqrt{y^2-1})=\pm(x-1)$$

因此所求曲线方程为 $y+\sqrt{y^2-1}=\mathrm{e}^{\pm(x-1)}$，即

$$y=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x-1}+\mathrm{e}^{-(x-1)})$$

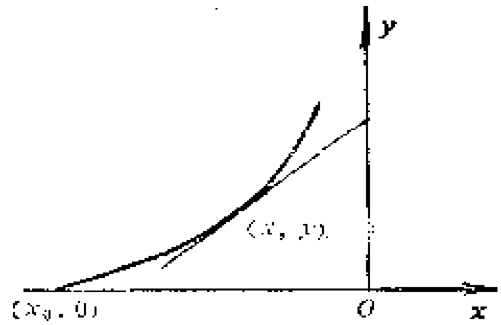
例18 设A从原点出发，以固定速度v_0沿y轴正向行驶，B从点$(x_0,0)$ $(x_0<0)$出发，以始终指向A的固定速度v_1朝A追去。

(1) 试求B的轨迹方程；

(2) 设$v_1>v_0$，问需多少时间B能追上A。

[解]　(1)设在 t 时刻，B 位于 (x,y)，则

$$y'_x=\frac{y-v_0t}{x} \qquad (\mathrm{I})$$



$$v_1=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\sqrt{1+y'^2_x}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \qquad (\mathrm{II})$$

将(Ⅰ)对 x 求导，得 $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{v_0}xy''$，代入(Ⅱ)并记 $K=v_0/v_1$，得到可降价方程

$$xy''+K\sqrt{1+y'^2}=0 \qquad (\mathrm{III})$$

又由题，有初始条件

$$y|_{x=x_0}=0,\quad y'|_{x=x_0}=0$$

解方程(Ⅲ)，令 $y'=P$，$y''=P'$，得

$$xP'+K\sqrt{1+P^2}=0$$

解之(分离变量)，得

$$P+\sqrt{1+P^2}=\frac{c}{x^K}$$

由 $P|_{x=x_0}=y'|_{x=x_0}=0$，定出 $c=x_0^K$，于是有

$$P=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^K-\left(\frac{x}{x_0}\right)^K\right]$$

两边积分求y，分两种情况：

情况1．$K\neq1$，$y=-\frac{x_0}{2}\left[\frac{1}{K-1}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{K-1}+\frac{1}{K+1}\left(\frac{x}{x_0}\right)^{K+1}\right]$ $+c$，由 $y|_{x=x_0}=0$，定出 $c=-\frac{Kx_0}{K^2-1}$，则B 的轨迹方程为

$$y=-\frac{x_0}{2}\left[\frac{1}{K-1}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{K-1}+\frac{1}{K+1}\left(\frac{x}{x_0}\right)^{K+1}-\frac{2K}{K^2-1}\right]$$

情况 2. $K=1$，同上得B的轨迹方程

$$y=-\frac{x_0}{2}\left[\ln\frac{x_0}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2-\frac{1}{2}\right]$$

（2）设追赶时间为T，因$v_1>v_0$，$K=v_0/v_1<1$，由情况一 1 的轨迹方程，有

$$v_0T=\lim_{x\to 0^-}y=x_0\frac{K}{1-K^2}=x_0\frac{v_0v_1}{v_1^2-v_0^2}$$

所以
$$T=\frac{x_0v_1}{v_1^2-v_0^2}$$

例19 设

$$\begin{cases}x''(t)+2mx'(t)+n^2x(t)=0\\ x(0)=x_1\\ x'(0)=x_2\end{cases}$$

其中 $m>n>0$，试求$\int_0^{+\infty}x(t)\,\mathrm{d}t$。

［解］ 方程$x''(t)+2mx'(t)+n^2x(t)=0$的通解

$$x(t)=c_1\mathrm{e}^{(-m+\sqrt{m^2-n^2})t}+c_2\mathrm{e}^{(-m-\sqrt{m^2-n^2})t}$$

因为$m>n>0$，故$-m+\sqrt{m^2-n^2}<0$，$-m-\sqrt{m^2-n^2}<0$，所以$\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$，$\lim\limits_{t\to+\infty}x'(t)=0$

且 $\int_0^{+\infty}x'(t)\,\mathrm{d}t$，$\int_0^{+\infty}x''(t)\,\mathrm{d}t$收敛，于是

$$\int_0^{+\infty}n^2x(t)\,\mathrm{d}t=-\int_0^{+\infty}[x''(t)+2mx'(t)]\mathrm{d}t$$

$$=-[x'(t)+2mx(t)]_0^{+\infty}=x'(0)+x(0)=x_2+2mx_1$$

故
$$\int_0^{+\infty} x(t)\,dt = \frac{x_2 + 2m x_1}{n^2}$$

自我测试题

1. 求下列微分方程的通解。

(1) $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}\,y' = 0$

(2) $(1-2y-y^2)\,dx = x(1+y)\,dy$

(3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y-1}{2x+4}$

(4) $xy\,dx + \left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{y}\right)dy = 0$

(5) $[\cos(x+y^2) + 3y]\,dx + [2y\cos(x+y) + 3x]\,dy = 0$

2. 求 $x^2y'' - (y')^2 = 0$ 的过点 $(1,0)$，且在此点与 $y = x-1$ 相切的积分曲线。

3. 求 $y^{(4)} - 2y''' + y'' = x$ 的通解。

4. 设 $f(x)$ 是偶函数，求满足 $f'(x) + 2f(x) + 3\int_0^x f(t-x)\,dt = x$ 的解。

5. 设由方程
$$(1+x)y = \int_0^x (2y + (t^2+1)y'')\,dt - \ln(1+x) \quad (\text{其中 } x \geq 0)$$
确定 y 为 x 的函数，且 $y'(0) = 0$。试求此函数 y。

6. 求下列微分方程的通解。

(1) $2y'' - 5y' = 5x^2 - 2x - 1$

(2) $y'' - 2y' + y = 5xe^x$

(3) $y'' + 2y' + 5y = -\frac{1}{2}\cos 2x$

7. 求方程 $y'' + y = x^2 + \cos x$ 满足初始条件 $y(0) = 0$，$y'(0) = 1$ 的特解。

8. 设函数 $f(x)$ 可微，且满足

$$f(x) - 1 = \int_1^x \left(f^2(x)\ln x - f(x)/x\right)dx$$

求 $f(x)$。

9. 已知 $\varphi(0) = \frac{1}{2}$，试确定 $\varphi(x)$，使曲线积分

$$\int_A^B [(e^x + \varphi(x))y\,dx - \varphi(x)\,dy]$$

与路径无关。

10. 求解下列微分方程。

(1) $x^2y'' + 3xy' + y = 0$

(2) $(x+2)^2y'' + 3(x+2)y' - 3y = 0$

答 案 与 提 示

1. (1) $y^2 = (c - \sqrt{1+x^2})^2 - 1$

(2) $y^2 + 2y - 1 = cx^{-1}$

(3) $c(x+2) = (x - y + 5)^2$

(4) $\frac{x^2y}{2} + \ln y = c$

(5) $\sin(x + y^2) + 3xy = c$

2. 积分曲线 $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$

3. 提示：用降阶法。

4. 提示：先消去积分符号令$u=t-x$，则对x求导后变为 $\int_0^x f(t-x)\,\mathrm{d}t=\int_{-x}^0 f(u)\,\mathrm{d}u$

代入原方程两端关于x两次求导，可得

$$f''(x)+2f'(x)-3f(-x)=1$$

即 $f''(x)+2f'(x)-3f(x)=1 \qquad (f(-x)=f(x))$

答案：$y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-3x}-\frac{1}{3}$

5. 特解 $y=\left[-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln(1+x)\right](1+x)+\frac{1}{4(1+x)}$

6. （1） $y=c_1+c_2\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}x}+\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{5}x^2+\frac{7}{25}x$

（2） $y=(c_1+c_2x)\mathrm{e}^x+\frac{5}{6}x^3\mathrm{e}^x$

（3） $y=\mathrm{e}^{-x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)-\frac{1}{34}\cos 2x$

$-\frac{2}{17}\sin 2x$

7. $y=c_1\cos x+c_2\sin x+x^2+\frac{1}{2}x\sin x-2$

8. $f(x)=1\Big/x\left[1-\frac{1}{2}\ln^2 x\right]$

9. $\varphi(x)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$

10. 提示：Euler方程。可按Euler型微分方程的解法求解。

系列练习

一、极限的计算补遗

1. 利用求和公式求极限

（1）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$.

［解］ 令 $S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$,

则 $$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

于是 $$S_n-\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{2^2}-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{5}{2^3}-\frac{3}{2^3}\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{2n-1}{2^n}-\frac{2n-3}{2^n}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

即 $$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

所以 $$S_n=1+\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}\right)-\frac{2n-1}{2^n}$$
$$=1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}$$

故 $$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+2-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n}{2^n}+\frac{1}{2^n}\right)=3$$

（2）练习

计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^3}{n^4}+\frac{2^3}{n^4}+\cdots+\frac{n^3}{n^4}\right)$.　　$\left(答案\frac{1}{4}\right)$

2． 利用极限存在准则求极限

（3）求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$.

〔证〕 由于 $0<\frac{2^n}{n!}=\frac{2,2\cdots2}{1,2\cdots n}\leqslant2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}=\frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

且
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$$

（4）练习

a）求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^n}\right)$存在。

b）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n次}x$　　（答案 0）

3． 利用等价无穷小代换关系求极限

准确地利用等价无穷小代换定理，可使极限的计算大大简化。熟记一些常见的等价无穷小对运算是有益的。

当 $x\to0$ 时有 $x\sim\sin x\sim\operatorname{tg}x\sim(e^x-1)\sim\ln(1+x)\sim\arcsin x\sim\operatorname{arctg}x$；$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$；$(1+x)^a-1\sim ax$；$a^x-1\sim x\ln a$；$\ln(1+ax)\sim ax$；若 $r(x)=\alpha(x)+\beta_1(x)+\cdots+\beta_n(x)$，其中 $\alpha(x)$、$r(x)$均为无穷小，且 $\beta_i(x)$ $(i=1,\cdots,n)$ 是$\alpha(x)$的高阶无穷小，则 $r(x)\sim\alpha(x)$。

（5）练习

计算下列极限：

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$ $\left(答案\dfrac{1}{2}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$ （答案14）

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^2 x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}$ （答案 1 ）

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$，（$m,n$ 为正整数）

$\left(答案\dfrac{\alpha}{m}+\dfrac{\beta}{n}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$ $\left(答案\dfrac{1}{p}\right)$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{k}{n^2}}-1\right)$ $\left(答案\dfrac{1}{6}\right)$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(a^{K/n^2}-1)$，$(a>1)$ $\left(答案\dfrac{1}{2}\ln a\right)$

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{ka}{n\sqrt{n}}$ $\left(0<a<\dfrac{\pi}{2}\right)$ $\left(答案e^{-\frac{a^2}{6}}\right)$

4． 作变量替换或化简函数求极限

有些极限的计算，形式上可能较复杂，但经过一些简化函数的运算，或用新的变量替换后可使极限形式变得较易求解。

（6）练习

计算极限：

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$ $\left(答案\dfrac{1}{n!}\right)$

b)　$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x}\right)$，$(x>0)$　　(答案 $\ln x$)

5．　利用定积分计算和式的极限

对于在 $[a,b]$ 上连续的函数 $f(x)$，由定义

$$\lim_{\substack{\|\Delta x_i\|\to 0\\(n\to\infty)}}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\,dx$$

因此，对求和式的极限，可适当选取 Δx_i（常取等分区间 $\Delta x_i=\dfrac{b-a}{n}$）和 ξ_i（常取子区间的端点）使之成为定积分计算。

（7）练习

计算极限：

a)　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$ $(p>0)$　　$\left(\text{答案}\dfrac{1}{p+1}\right)$

b)　$\lim_{n\to\infty} n(b-a)\left(\dfrac{1}{n^2+(na+1)^2}+\dfrac{1}{n^2+(na+2)^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+(na+n)^2}\right)$　　(答案 $\operatorname{arctg}b-\operatorname{arctg}a$)

6．　利用台劳(Taylor)展式求极限

（8）求 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg}x)-\sin(\sin x)}{\operatorname{tg}x-\sin x}$

［解］　由于 $\operatorname{tg}x=x+\dfrac{x^3}{3}+0(x^3)$，

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+0(x^3)$$

于是　$\operatorname{tg}(\operatorname{tg}x)=\operatorname{tg}\left[x+\dfrac{x^3}{3}+0(x^3)\right]=x+\dfrac{x^3}{3}+0(x^3)$

$$+\frac{x^3}{3}+0(x^3)=x+\frac{2}{3}x^3+0(x^3)$$

$$\sin(\sin x)=\sin\left[x-\frac{x^3}{6}+0(x^3)\right]=x-\frac{x^3}{6}+0(x^3)$$

$$-\frac{x^3}{6}+0(x^3)=x-\frac{x^3}{3}+0(x^3)$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{tg}(\text{tg}x)-\sin(\sin x)}{\text{tg}x-\sin x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[x+\frac{2}{3}x^3+0(x^3)\right]-\left[x-\frac{1}{3}x^3+0(x^3)\right]}{\left[x+\frac{x^3}{3}+0(x^3)\right]-\left[x-\frac{x^3}{6}+0(x^3)\right]}=2$$

（9）练习

计算极限：

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})$ $\left(\text{答案}\frac{1}{3}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$ $\left(\text{答案}-\frac{1}{12}\right)$

7. 借用级数收敛的一些结论求极限

(10) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，其中 $x_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$

[解] 我们将数列$\{x_n\}$看作函数列在某点的值。令

$$f_n(x)=-\cos x+\frac{1}{2^2}\cos 2x-\frac{1}{3^2}\cos 3x+\cdots+(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$$

则 $$f_n(\pi)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$$

函数x^2在$[-\pi,\pi]$上的傅里叶(Fourier)级数为

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2},\quad [-\pi,\pi]$$

所以 $$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{1}{4}\left(x^2-\frac{\pi^2}{3}\right)$$

故 $$\lim_{n\to\infty}x_n=f(\pi)=\frac{1}{4}\left(\pi^2-\frac{\pi^2}{3}\right)=\frac{\pi^2}{6}$$

(11) 练习

计算极限：

a) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，其中 $x_n=\dfrac{n^n}{(n!)^2}$，$n=1,2,\cdots$ （答案0）

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$，$(n>1)$ （答案0）

c) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1})$，$|x|<1$

$\left(\text{答案}\dfrac{1}{(1-x)^2}\right)$

8. 其它

(12) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}=a$

[证] 对于 $\forall\varepsilon>0$，存在正整数 N_1，当 $n>N_1$ 时

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$$

故 $$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|$$

$$=\left|\frac{a_1-a+a_2-a+\cdots+a_{N_1}-a}{n}+\frac{a_{N_1+1}-a+\cdots+a_n-a}{n}\right|$$

$$\leqslant\frac{|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|}{n}+\frac{|a_{N_1+1}-a|+\cdots+|a_n-a|}{n}$$

$$\leqslant \frac{c}{n}+\frac{n-N_1}{n}\varepsilon<\frac{c}{n}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

其中 c 是某一正常数，因此当 n 充分大(即可取 N 当 $n>N$)时，$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|<\varepsilon$ 恒成立，故由定义命题得证。

注：更进一步，有如下结果

若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$

则
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=ab$$

利用连续函的性质还可证明：

若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}=a$

这是因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\exp\ln\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\exp\frac{\ln a_1+\cdots+\ln a_n}{n}=\exp\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln a_1+\cdots+\ln a_n}{n}$，且当

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 时有 $\lim\ln a_n=\ln a$。从而根据(12)便得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=$

$\exp\ln a=a$。

(13) 设 $a_1>0$，$a_2>0$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n}=\max\{a_1,a_2\}$

更一般的结论是

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max\{a_1,\cdots,a_m\}$$

此结论的证明只要利用极限存在准则之一夹逼定理即可。

将 m 个实数的情形推广到连续型时可得如下结论：

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，正值，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)\,dx}=\max_{x\in[a,b]}f(x)$$

更一般的结论是

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)\cdot\varphi(x)\,\mathrm{d}x}=\max_{x\in[a,b]}f(x)$$

其中 $\varphi(x)$ 是$[a,b]$上的正值连续函数。

(14) 在求数列的极限中，常会遇到$n!$的形式的运算，对此类极限计算可考虑用斯脱林公式：$n!=\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{\theta_n}{12n}}$，其中$0<\theta_n<1$。

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$。

[解] 由斯脱林公式，有

$$\frac{2^n\cdot n!}{n^n}=2^n\cdot n^{-n}\cdot\left[\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{\theta_n}{12n}}\right]=\mathrm{e}^{n\ln 2}\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln n}\cdot \mathrm{e}^{-n}$$

$$\times\sqrt{2\pi}\cdot \mathrm{e}^{\frac{\theta_n}{12n}}=\mathrm{e}^{-n+\frac{1}{2}\ln n+n\ln 2}\cdot\sqrt{2\pi}\cdot \mathrm{e}^{\frac{\theta_n}{12n}}$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-n+n\ln 2+\frac{1}{2}\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-n\left(1-\ln 2-\frac{\ln n}{2n}\right)}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{\theta_n}{12n}}=0$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\mathrm{e}^{-n+n\ln 2+\frac{1}{2}\ln n}\cdot\sqrt{2\pi}\cdot \mathrm{e}^{\frac{\theta_n}{12n}}\right)=0$

(15) 练习

计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}$.　　　$\left(答案\frac{\mathrm{e}}{2}\right)$

(16) 利用施托尔兹法则求极限

求比式的极限用施托尔兹法则有时是很方便的。

施托尔兹法则：

设$x_n=\frac{y_n}{z_n}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=+\infty$，$z_{n+1}>z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{z_{n+1}-z_n}$

存在（含无穷），　则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{z_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}-y_n}{z_{n+1}-z_n}$

练习

计算极限：

a）(12)用施托尔兹法则计算。

b）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p}-\frac{n}{p+1}\right)$，（$p$为自然数），

$\left(\text{答案}\frac{1}{2}\right)$

(17）练习

a）已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{t^2 dt}{\sqrt{b+3t}}}{ax-\sin x}=2$，试决定常数$a$、$b$。

（答案$a=1$，$b=1$）

b）求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[n]{(x+a_1)\cdots(x+a_n)}-x)$

$\left(\text{答案}\frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_n)\right)$

c）已知 x_1、y_n 均为正数，$x_{n+1}=\sqrt{x_n y_n}$，

$$y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2},\quad (n=1,3\cdots)$$

证明：x_n、y_n均收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} y_n$

（提示：先证$x_n\leqslant y_n$，再运用数列极限存在准则）

d）当 $x\to 0$ 时，试求出函数$\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}$ 的形如cx^n(c为常数)的主部，并确定关于无穷小量x的阶。

（答案 $\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$；二阶）

二、关于不等式的讨论

1. 基本不等式

设$f(x)$在(a,b)内二阶导数$f''(x)>0$，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为正实数，且$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$，则对于任意的$x_1,x_2,\cdots,x_n\in(a,b)$有

$$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n)\leqslant\alpha_1f(x_1)+\cdots+\alpha_nf(x_n) \tag{1}$$

[证] 令$x_0=\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i$，易见$x_0\in(a,b)$

将$f(x)$进行Taylor展开，可得

$f(x_i)=f(x_0)+f'(x_0)(x_i-x_0)+\dfrac{f''(\xi)}{2}(x_i-x_0)^2$，$i=1,2,\cdots,n$，$\xi$在$x_i$与$x_0$间．利用已知条件，再将上述$n$个式子相加即得证。在（1）中如果取$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=\dfrac{1}{n}$，便可得

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n} \tag{2}$$

特别，（1）中当$n=2$时有

$$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\leqslant\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$$

如果设$f(x)=x^p$，$(p>1)$，则$f''(x)>0$，$(x>0)$

故在（2）中有

$$\left(\frac{x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p}{n}\right)\geqslant\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^p,\quad(x_i>0)$$

当$n=2$时即得$\dfrac{x_1^p+x_2^p}{2}\geqslant\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)^p$

又设$f(x)=-\ln x$，则$f''(x)>0$，由此，我们可得到

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

及

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}\leqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

这就是我们在第一章分析引论中指出的两个重要的不等式。利用这两个不等式可以证得许多大家较熟悉的不等式。

例如证明数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$单调上升，即要证明对自然数$n$有$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{1+n}\right)^{n+1}$。

事实上，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n\text{个}}\cdot 1$

$$\leqslant\left[\frac{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot n}{n+1}\right]^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

由于$1+\frac{1}{n}\neq 1$，上述不等式成立严格的不等号。利用此结论可以得到重要极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$。

又如
$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

因为 $\sqrt[n]{n!}<\frac{1+2+\cdots+n}{n}=\frac{1+n}{2}$，故$n!<\left(\frac{1+n}{2}\right)^n$

再如 $\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<e\left(\frac{n}{2}\right)^n$

由于 $n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n=\left(\frac{n}{2}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，而$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$单调上升，极限为e，故$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$，从而$n!<e\cdot\left(\frac{n}{2}\right)^n$。

不等式的左边部分可如下得出

由 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$可知：$\frac{2}{1}<e$，$\frac{3^2}{2^2}<e$，$\cdots$，$\frac{(1+n)^n}{n^n}<e$

相乘便得$\frac{(n+1)^n}{n!}<e^n$，即$n!>\left(\frac{n+1}{e}\right)^n$，自然得到$n!>\left(\frac{n}{e}\right)^n$

完全类似还可证明数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$是单调下降的。

在基本不等式（1）中，如令

$$f(x)=-\ln\frac{\sin x}{x},\quad 0<x<\pi$$

则

$$f''(x)=\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}>0$$

对于$0<x_i<\pi$，$i=1,2,\cdots,n$ · $x=\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$ 可得

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\sin x_i}{x_i}\right)\leqslant\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n$$

对于以上的不等式可进一步讨论推广，下面我们观察一下连续时的情况。

若$\varphi(x)\in c[a,b]$，取

$$x_i=\varphi\left(i\cdot\frac{b-a}{n}\right),\quad i=1,2,\cdots n$$

由(1)有$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi\left(i\cdot\frac{b-a}{n}\right)\right)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\varphi\left(i\cdot\frac{b-a}{n}\right)\right)$

当$n\to\infty$时可得

$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t$$

在上式中，若取$f(x)=-\ln x$，$a=0$，$b=1$，可得

$$\ln\int_0^1\varphi(t)\,\mathrm{d}t\geqslant\int_0^1\ln\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

或
$$\int_0^1\varphi(t)\,\mathrm{d}t\geqslant\exp\int_0^1\ln\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

将$\varphi(t)$以$\exp\varphi(t)$代替，又可得

$$\int_0^1\exp\varphi(t)\,\mathrm{d}t\geqslant\exp\int_0^1\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

如果步步深入，我们还可得到许多不等式，这里不再一一列举。

2. 利用函数的定号性证明不等式

在证明一些不等式时，如果题目中给出函数的单调性，我们常常试用下述方法解决：

(i) 函数$f(x)$单调，利用因子

$(x-y)[f(x)-f(y)]$的定号性

(ii) $f(x)$、$g(x)$都单调，常利用因子

$[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]$的定号性

其中x、y可为变量，也可是某一定值。

例1 设$f(x)$、$g(x)$在$[a,b]$连续且同时单调增或单调减，则

$$(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

［证］ 考虑因子

$$[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]$$

对 $\forall x,y\in(a,b)$，该因子非负，即

$$[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]\geqslant 0$$

故 $$\int_a^b\int_a^b[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant 0$$

化简整理即得结论。

一般地，若 $p(x)$ 正值连续，且单调增加，则

$$\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_a^b p(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

例 2 设 $f(x)$ 是正值连续函数，证明

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant(b-a)^2$$

［证］ 考虑 $[f(x)-f(y)]\left[\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(y)}\right]$的定号性

将二重积分

$$\int_a^b\int_a^b[f(x)-f(y)]\left[\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(y)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant 0$$

化简整理即得证。

例 3 设 $f(x)$ 连续且单调上升，$f(0)>0$

则 $$1\leqslant\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\leqslant\frac{[f(0)+f(1)]^2}{4f(0)f(1)}$$

［证］ 左端为例 2 的特殊情况。今证右端。

考虑$[f(x)-f(0)][f(x)-f(1)]$的定号性

积分 $$\int_0^1\frac{[f(x)-f(0)][f(x)-f(1)]}{f(x)}\mathrm{d}x\leqslant 0$$

化简整理得

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + f(0)f(1)\cdot\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant f(0)+f(1)$$

上式左端$\geqslant 2\sqrt{f(0)f(1)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x}$

于是得

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{[f(0)+f(1)]^2}{4f(0)f(1)}$$

更一般地有：

若$f(x)$定义于$[a,b]$上，$0<m\leqslant f(x)\leqslant M$。则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{(M+m)^2(b-a)^2}{4M\cdot m}$$

例 4 设 $f(x)$在$[a,b]$上单调上升，证明

$$\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

[证] 注意到

$$\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left[f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\mathrm{d}x \geqslant 0$$

即得。

例 5 设 $f(x)$正值且单调下降，则

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x} \leqslant \frac{\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}$$

[证] 注意到

$$\int_0^1\int_0^1 f(x)f(y)(x-y)[f(x)-f(y)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant 0$$

即可得证。

3． 微分、积分中的一些不等式

在导数、Taylor展开、定积分等章节中，常遇到一些不等式，这些不等式的共同特点是将定义在某区间$[a,b]$上的函数$f(x)$与其导数、二阶导数或更高阶的导数，或其定积分之值进行比较，在此我们列举若干，有些前面我们曾提到过，望读者通过练习总结规律。

（1） 设$f(x)$是$[a,b]$上连续的凹函数，则

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

（2） 设$f(x)$是$[a,b]$上的连续的凹函数，则

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{2}\cdot(b-a)$$

（3） 设$f(x)\geqslant 0$是$[a,b]$上的凸函数且$f''(x)\leqslant 0$，则

$$f(x)\leqslant\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,\quad x\in[a,b]$$

（4） $f(x)$在$[a,b]$上连续、单调上升，则

$$\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

（5） 设$f''(x)$在$[a,b]$上连续，$f(a)=f(b)=0$，则

（i） $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{(b-a)^3}{12}\max\limits_{[a,b]}|f''(x)|$

（ii） 若$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$ 则

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{(b-a)^3}{24}\max_{[a,b]}|f''(x)|$$

（iii） $\int_a^b|f''(x)|\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{4}{b-a}\max\limits_{[a,b]}|f(x)|$

(iv) $\max\limits_{[a,b]}|f'(x)|<(b-a)\max\limits_{[a,b]}|f''(x)|$

(v) $\max\limits_{[a,b]}|f(x)|\leqslant\frac{1}{8}(b-a)^2\max\limits_{[a,b]}|f''(x)|$

一般，设$f(x)$在$[a,b]$上有$2n$阶连续导数，且$f^{(m)}(a)=f^{(m)}(b)=0$，$m=1,2,\cdots,n-1$，则

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{(n!)^2(b-a)^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)!}\max_{[a,b]}|f^{(2n)}(x)|$$

(6) 若$f'(x)\in[a,b]$，则

(i) 若$f(a)=0$有$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{(b-a)^2}{2}\max\limits_{[a,b]}|f'(x)|$

(ii) 若$f(a)=f(b)=0$有

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}\max_{x\in[a,b]}|f'(x)|$$

(iii) 若$f(a)=0$ 有 $\max\limits_{[a,b]}|f(x)|\leqslant(b-a)\int_a^b|f'(x)|^2\mathrm{d}x$

(iv) 若$f(a)=0$有$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b[f'(x)]^2\mathrm{d}x$

(7) 设$f(x)$在$[a,b]$上二级可导，且$f'(a)=f'(b)=0$，则在$[a,b]$内至少存在一点ξ，使得

$$f''(\xi)\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

(8) 设$f'\in c[a,b]$，则

$$\max_{[a,b]}|f(x)|\leqslant\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|+\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x$$

若$f''(x)\in c[a,b]$，则

$$\max_{[a,b]}|f'(x)|\leqslant\frac{1}{b-a}|f(b)-f(a)|+\int_a^b|f''(x)|\mathrm{d}x$$

（9）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上二阶连续可导，$f(0)=f(1)=0$，$f(x)\neq 0$，$x\in(0,1)$，则

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x\geqslant 4$$

（10）设 $f(x)$、$g(x)\in c[a,b]$，且 $f(x)$ 单调减，$0\leqslant g(x)\leqslant 1$，记 $\lambda=\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$，则

$$\int_{b-\lambda}^b f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_a^{a+\lambda}f(t)\,\mathrm{d}t$$

模拟竞赛试题（一）

一、设 $f(x)$ 二阶可导，且 $f'(x)=f(1-x)$，试求 $f(x)$。

二、设 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(x+\frac{z}{y},\ y+\frac{z}{x}\right)=0$ 所确定，证明

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy$$

三、设 $f(x)$ 具有连续导数，且 $f(1)=1/2$，在平面域 $x>1$ 上的任一闭曲线 L，积分

$$\oint_L\left(ye^xf(x)-\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x-\ln f(x)\,\mathrm{d}y=0$$

试求 $f(x)$。

四、证明：曲面 $F\left(\frac{x-a}{z-c},\ \frac{y-b}{z-c}\right)=0$ 的切平面通过一定点。

五、设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可微，$f(a)=f(b)$，$g(a)=g(b)$，则在 (a,b) 上存在点 ξ，使

$$\begin{vmatrix} f''(\xi) & g''(\xi) \\ f(\xi)-f(a) & g(b)-g(\xi) \end{vmatrix}=2f'(\xi)g'(\xi)$$

六、设 $f(x)$ 在[0,1]上可微，且 $x\in(0,1)$ 时 $|f'(x)|\leqslant M$. 证明：对任意 $n\geqslant1$，n 自然数，有

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\frac{M}{n}$$

七、设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，且 $f(a)\neq0$，试求

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f\left(a+\frac{2}{n}\right)}{f(a)}\right)^n$$

八、计算 $\displaystyle\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x$.

九、设 $f(x)$ 在$[-\pi,\pi]$可积，$a_k(k=0,1,2,\cdots)$ 为 Fourier系数，试证

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x$$

提示与答案

一、$f''(x)+f(x)=0$，$f'(1)=f(0)$ 得

$$f(x)=c_1\left[\cos x+\frac{1+\sin 1}{\cos 1}\sin x\right]$$

二、利用隐函数求导法则.

三、$$f(x)=\frac{1}{x\left(2-\int_1^x\frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x\right)}$$

四、通过点(a,b,c)。

五、研究函数$\varphi(x)=f(x)g(b)-f(x)g(x)+f(a)g(x)$

六、对$E_k=\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx-\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$，$k=1,2,\cdots,n$

第一次用积分中值定理，再对E_k用微分中值定理。

七、$\exp\left[\frac{2f'(a)}{f(a)}\right]$

八、$\operatorname{arctg}\frac{b-a}{1+(1+a)(1+b)}$

九、令$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$，由$0\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2dx$计算取极限得结论。

模拟竞赛试题(二)

一、证明：若$\lim_{n\to\infty}x_n=a$（或$\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty$），则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}x_n$$

二、设$\omega=f(x,2y,z)$，而$z=\varphi(xy+y)$，其中f具有连续的二阶偏导数，φ二阶可微，求$\frac{\partial\omega}{\partial x}$，$\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}$。

三、计算

1. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{t}{n}+\frac{t^2}{2n^2}\right)^{-n}$

2. $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$

四、设当 $x>-1$时，可微函数 $f(x)$ 满足条件

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=0,\quad f(0)=1.$$

1. 求 $f'(x)$。

2. 试证当 $x\geqslant 0$时，$\mathrm{e}^{-x}\leqslant f(x)\leqslant 1$。

五、已知 S 是由 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 所确定的球面的上半部分的外侧，求曲面部分。

$$\iint_S xz^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2y-z^3)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(2xy+y^2z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

六、判断级数

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)\text{的收敛性。}$$

七、解微分方程

$$\begin{cases} y''+4y=f(x)\\ y(0)=0\\ y'(0)=0\end{cases}$$

其中
$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\\[2ex] 0, & x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

八、在半径为 R 的半球内嵌入有最大体积的直角平行六面体，求其各棱边之长。

提 示 与 答 案

一、提示：若 a 有限，可由定义证明，注意到

$$\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-a\right|\leqslant\left|\frac{(x_1-a)+\cdots+(x_N-a)}{n}\right|$$

$$+\left|\frac{(x_{N+1}-a)+\cdots+(x_n-a)}{n}\right|\leqslant\frac{c}{n}+\varepsilon$$

其中N是使得对任意 $\varepsilon>0$，$|x_n-a|<\varepsilon$ 成立的自然数。若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$可依定义证明。

二、$\dfrac{\partial\omega}{\partial x}=f'_x+f'_z(x,2y,z)\cdot\varphi'(xy+y)y$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}=[2f''_{xy}+f''_{xz}\varphi'(xy+y)\cdot(x+1)]\varphi'(xy+y)'y+f'_z[\varphi''(xy+y)\cdot(x+1)y+\varphi\cdot(xy+y)]$$

三、1. e^{-t}　　2. $\dfrac{\pi}{8}\ln 2$

四、1. $f'(x)=\dfrac{e^{-x}}{x+1}$

五、$\dfrac{2}{5}\pi a^5$

六、收敛

七、$y=\begin{cases}-\dfrac{1}{6}\sin 2x+\dfrac{1}{3}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\\ -\dfrac{1}{6}\sin 2x+\dfrac{1}{4}, & x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

八、平行六面体棱边为$\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$，$\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$，$\dfrac{R}{\sqrt{3}}$。

模拟竞赛试题(三)

一、计算

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[(n^k+1)^{-\frac{1}{k}}+(n^k-1)^{-\frac{1}{k}}\right]$$

二、计算

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[x\sin x\cdot\ln(x+\sqrt{x^2+1})+\sqrt{\ln^2(1-x)}\,\right]dx$$

三、设$f(x)$的一阶导函数在$[0,\ 1]$上连续，且$f(0)=f(1)=0$。证明：

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right|\leqslant\frac{1}{4}\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|$$

四、设x,y,z为实数，且$x+y+z=0$，证明：

$$6(x^3+y^3+z^3)^2\leqslant(x^2+y^2+z^2)^3$$

五、方程 $\ln x=ax\quad(a>0)$有几个实根？

六、设 $u=x$，$v=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}$，$w=\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{x}$，式中$w=w(u,v)$为新函数，试求作上述变换后方程$x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=z^2$的形式。

七、球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz$ 内，各点处的体密度等于该点到坐标原点的距离的平方。试求球的重心。

八、已知可微函数 $f(x)$ 满足$\displaystyle\int_1^x\frac{f(x)}{f^2(x)+x}\,dx=f(x)-1$

（1） 求$f(1)$；（2） 求$f(x)$。

九、证明： $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)(4n+3)}=\frac{\pi}{8}$

十、设 $f(x)$ 的二阶导数连续，且 $f(0)=f(1)=0$，及 $\min\limits_{x\in[0,1]}f(x)=-1$，试证： $\max\limits_{x\in[0,1]}f''(x)\geq 8$。

提 示 与 答 案

一、令 $y=(n^x+1)^{-\frac{1}{x}}$，则 y 单调增加，故

$$\frac{n}{n+1}<\sum_{k=1}^{n}(n^k+1)^{-\frac{1}{k}}<\frac{1}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}}$$

由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(n^k+1)^{-\frac{1}{k}}=1$. 同理 $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(n^k-1)^{-\frac{1}{k}}=1$。

二、$\frac{3}{2}\ln 3-2\ln 2$

三、应用 Lagrange 定理并对等式分别在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 及 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上积分得

$$0=\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)\,dx+\int_0^{\frac{1}{2}}f'(\xi_1)(-x)\,dx,\quad 0<\xi_1<x$$

$$0=\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}f'(\xi_2)(1-x)\,dx,\quad x<\xi_2<1$$

于是由 $0=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^{\frac{1}{2}}f'(\xi_1)(-x)\,dx$

$$+\int_{\frac{1}{2}}^{1} f'(\xi_2)(1-x)\,dx$$

故 $$\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right| \leqslant \max_{x\in[0,1]}|f'(x)|\left[\int_0^{\frac{1}{2}} x\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x)\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{4}\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|$$

四、考察函数 $\varphi(x,y,z)=6(x^3+y^3+z^3)^2-(x^2+y^2+z^2)^3$ 在条件 $x+y+z=0$ 下的极值。

五、当 $0<a<\frac{1}{e}$ 时有两个实根，分别位于 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 及 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 内。当 $a=\frac{1}{e}$ 时，有一个实根 $x=e$。当 $a>\frac{1}{e}$ 时无实根。

六、$\frac{\partial w}{\partial u}=0$

七、重心 $\left(0,0,\frac{5}{4}R\right)$

八、（1）$f(1)=1$，（2）$f(x)=\sqrt{x}$

九、注意到 $\operatorname{arctg}x$ 的马克洛林级数，且 $\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$。

十、只要证明存在 $\xi\in[0,1]$ 使 $f''(\xi)\geqslant 8$。由 $f(x)$ 连续并设 $x_0\in(0,1)$，$f(x_0)=-1$ 为最小值，在 x_0 与 $1-x_0$ 两数中至少有一个不大于 $\frac{1}{2}$，不妨设 $0<x_0\leqslant\frac{1}{2}$。在 x_0 处 $f(x)$ 的一阶台劳(Taylor)公式中，令 $x=0$，并注意到 $f'(x)=0$ 即得 $f''(\xi)=\frac{2}{x_0^2}\geqslant 8$，$\xi\in(0,x_0)\subset[0,1]$。

模拟竞赛试题(四)

一、设 $f(x)=\frac{x+2}{x+1}$, $x_0=1$, $x_{n+1}=f(x_n)$ $(n=0,1,2\cdots)$.

证明：

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\sqrt{2}$$

二、设$x\in[a,b]$时 $f''(x)\geqslant 0$，证明，对任何 x_1、x_2、…、$x_n\in[a,b]$，有

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

又若$f''(x)>0$，则上述不等式中的等号仅当$x_1=x_2=\cdots=x_n$时成立。

三、设

$$R=\frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\beta+\sin\beta\sin\gamma+\sin\gamma\sin\alpha},$$

$$\left(0<\alpha<\beta<\gamma<\frac{\pi}{2}\right),$$

试问α,β,γ中哪一个的变动对R的影响最大。

四、设$f(x)$为$[0,1]$上正值连续函数，证明：

$$\ln\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1\ln f(x)\,\mathrm{d}x$$

五、设$g(x)$为可微函数$f(x)$的反函数，且$|x|<1$，

$$\int_0^{f(x)} g^2(t)\,\mathrm{d}t=f(x)+x-\frac{1}{2}$$

试求$f(x)$。

六、计算

$$I=\iiint_V (x+y+z)^2 \mathrm{d}V$$

其中 V：$2az\geqslant x^2+y^2$，$x^2+y^2+z^2\leqslant 3a^2$ $(a>0)$。

七、计算

$$\int_L (\mathrm{e}^x\sin y-my+y)\,\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-mx)\,\mathrm{d}y$$

其中 L：$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant\pi)$，积分方向为 t 的增加方向。

八、设微分方程 $y''-\frac{1}{x}y'+q(x)y=0$ 有两个特解 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$，且 $y_1(x)y_2(x)=1$，试求 $q(x)$ 及方程通解。

九、按照 α 与 β 的值，研究一般项为 $V_n=\sin\frac{n^2+n\alpha+\beta}{n}\pi$ 之级数的敛散性。

提 示 与 答 案

一、设 $y_n=x_n-\sqrt{2}$，则 $|y_{n+1}|=\left|\frac{x_n+2}{x_n+1}-\sqrt{2}\right|=\frac{\sqrt{2}-1}{x_n+1}|x_n-\sqrt{2}|$，由于 $x_n\geqslant 1$，得 $|y_{n+1}|\leqslant\frac{\sqrt{2}-1}{2}|y_n|\leqslant\cdots\leqslant\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^n|y_1|$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$。

二、 令 $s=\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}$，则$s\in[a,b]$。利用 s 点处的一阶Taylor 公式得

$$f(x_i)\geqslant f(s)+f'(s)(x_i-s)$$

于是由 $f(s)\leqslant\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)$，注意到$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=ns$及$f''(x)>0$，上式等号仅当$x_1=x_2=\cdots=x_n$时成立。

三、改变a时对 R影响最大。

四、在[0,1]上 n 等分由定积分定义

$$\lim_{n\to\infty}\ln\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}=\ln\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1\ln f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

由不等式$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\geqslant\left(\prod\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{n}}$ $(x_i>0,i=1,\cdots,n)$，$f(x)>0$，有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\geqslant\left(\prod_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$$

注意形式(1)，(2)易得结论。

五、$\dfrac{1}{2}\ln 3\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$

六、$\dfrac{\pi a^5}{5}\left(18\sqrt{3}-\dfrac{97}{6}\right)$

七、$e^{a^2}\sin 2a-2\pi a^2 m+\dfrac{3}{2}\pi a^2$

八、若$y_1(x)=c$(常数)，显然，$y_1(x)\neq 0, y_2(x)=\frac{1}{c}$。此时$q(x)=0$，通解$y=c_1x^2+c_2$。

若$y_1(x)\neq c$(常数)，则$y_2(x)$与$y_1(x)$线性无关。于是通解为$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$，由于$y_1(x)$与$\frac{1}{y_1(x)}$为方程解，可解出$q(x)=-\frac{y_1'^2}{y_1^2}=-4k^2x^2(y_1=e^{kx^2}$，$k$为常数)，通解为

$$y=c_1e^{kx^2}+c_2e^{-kx^2}$$

九、由$\sin\frac{n^2+n\alpha+\beta}{n}\pi=(-1)^n\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{n}\right)\pi$，$n$充分大时原级数可视为交错级数。

若α为整数，不论β为何值，$\sin\frac{n^2+n\alpha+\beta}{n}\pi=(-1)^{n+\alpha}\cdot\sin\frac{\beta}{n}\pi$由Leibniz判敛法知级数收敛。

若α不为整数，不论β为何值，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\sin\frac{n^2+n\alpha+\beta}{n}\pi\right|=\sin\alpha\pi\neq 0$，此时级数发散。

国外高等数学竞赛试题选

美国部分

1. 设$F(x)$除$x=0$与1两点外，对全体实数都有定义，并满足等式：$F(x)+F\left(\frac{x-1}{x}\right)=1+x$，求符合这一

条件的所有函数$F(x)$。

2． 求证：$1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}>\frac{e^n}{2}$ 对于每个整数$n\geqslant 0$成立。

3． 证明：若$S_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$，则

（1） $n(n+1)^{\frac{1}{n}}<n+S_n$ 当$n>1$

（2） $(n-1)n^{-\frac{1}{n-1}}<n-S_n$

4． 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n(n>1)$ 均为实数，且 $A+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2<\frac{1}{n-1}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^2$，证明：对于 $1\leqslant i<j\leqslant n$有 $A<2a_ia_j$

5． 设$0<x_i<\pi(i=1,2,\cdots,n)$，且令 $x=\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$

证明：$\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{\sin x_i}{x_i}\leqslant\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n$

6． 求下列极限：

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{e^n}$

（2） $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x(1+\sin 2t)^{1/t}\mathrm{d}t$

7． 给定一个序列$\{x_n\}_{(n=1,2,\cdots)}$，且具有性质 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{n}=0$。

8． 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\prod\limits_{i=1}^{2n}(n^2+i^2)^{1/n}$

9．设$0<a<b$，试求$\lim\limits_{t\to 0}\left\{\int_0^1 [bx+a(1-x)]^t dx\right\}^{1/t}$的值。

10．计算$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 \cos^2\left\{\frac{\pi}{2n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\right\}dx_1 \cdot dx_2\cdots dx_n$。

11．考虑函数　$f(x,n)=\dfrac{\binom{n}{0}+\binom{n}{2}x+\binom{n}{4}x^2+\cdots}{\binom{n}{1}+\binom{n}{3}x+\binom{n}{5}x^2+\cdots}$，式中$n$为正整数，试用含$f(x,n)$与$x$的有理式来表示$f(x,n+1)$，由此式用别的方法，对适当的$x$固定值求$\lim\limits_{n\to\infty}f(x,n)$。

12．如果一质点在平面内运动，它的坐标x与y可表为时间t的函数：$x=t^3-t$，$y=t^4+t$，证明：曲线在$t=0$处有一个拐点，并且质点运动的速度在$t=0$处有一极大值。

13．已知抛物线$y^2=2mx$，试从它的那些与曲线的法线重合的所有弦中，求一条长度最短的弦。

14．求证内切于一给定正方形的所有椭圆中，以圆的周长为最大。

15．在区间$[0,2\pi]$上

（1）证明$\sin^2\theta\sin 2\theta$在$\frac{\pi}{3}$与$\frac{4\pi}{3}$有极大值$\left(\text{因而在}\frac{2\pi}{3}\text{与}\frac{5\pi}{3}\text{有极小值}\right)$。

（2）证明$|\sin^2\theta\{\sin^3(2\theta)\sin^3(4\theta)\cdots\sin^3(2^{n-1}\theta)\}\sin(2^n\theta)|$在$\theta=\frac{\pi}{3}$有极大值。

（3）证明不等式$\sin^2\theta\sin^2(2\theta)\cdots\sin^2(2^n\theta)\leqslant\left(\frac{3}{4}\right)^n$

16．设 c 是区间$0\leqslant x\leqslant 1$上满足$f(0)=0$和$f(1)=1$的所有实值连续可微函数 f 所组成的函数类，试确定一个最大的实数u，使对所有$f\in c$恒有 $u\leqslant\int_0^1|f'(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x$。

17．在平面上任意给定六点，求证这六点中，两点间的最远距离与两点间最近距离的比不小于$\sqrt{3}$。

18．函数$f(x)=2^x-1-x^2$在实数轴上有多少个零点？

19．（1）设函数 f 在$[0,1]$上有连续导数，满足$0<f'(x)\leqslant 1$且$f(0)=0$，求证$\left[\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2\geqslant\int_0^1[f(x)]^3\mathrm{d}x$。

（2）作出一个使上式等号成立的例子。

20．设$f(x,y)$在域$S=\{(x,y):\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$上连续，对任意$(a,b)\in S$，设$S(a,b)$是以$(a,b)$为中心且全含于$S$内且各边与$S$的边平行的最大正方形，若总有$\iint\limits_{S(a,b)}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，问：$f(x,y)$在$S$上恒等于零吗？

21．设$p(x)=2+4x-3x^2+5x^3+3x^4+4x^5+2x^6$对于适合$0<K<5$之每一个$K$，定义

$$I_K=\int_0^{\infty}\frac{x^K}{p(x)}\mathrm{d}x$$

问：对应于哪一个K的I_K最小？

22．计算$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+(\operatorname{tg}x)^{\sqrt{2}}}$。

23．求证$\frac{22}{7}-\pi=\int_0^1\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

24．设$f_0(x)=e^x$，$f_{n+1}(x)=xf_n'(x)$，$(n=0,1,2,\cdots)$

证明 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n(1)}{n!}=e^e$。

25．求 $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}$。

26．将 $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2n+mn^2+2mn}$ 表示成一个有理数。

27．证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{P_n}$ 收敛 $(p_1, p_2, \cdots p_n\cdots$ 为正实数)，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(p_1+p_2+\cdots+p_n)^2}p_n$ 也收敛。

28．设 f 是定义在 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上且具有偏导数的实函数，$|f(x, y)|\leqslant 1$。求证在单位圆内有一点 (x_0, y_0) 可使 $\left[\frac{\partial f(x_0 y_0)}{\partial x}\right]^2+\left[\frac{\partial f(x_0 y_0)}{\partial y}\right]^2\leqslant 16$。

29．设 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是微分方程 $y''=f(x)y$ 在实轴的某个区间 I 上的线性无关的解。其中 $f(x)$ 是实值连续函数。设 I 上 $y_1(x)>0$，$y_2(x)>0$，证明存在一个正常数 c，使得在 I 上函数 $z(x)=c\sqrt{y_1(x)y_2(x)}$ 满足方程 $z''+\frac{1}{z^3}=f(x)z$。

30．（1）找出齐次线性微分方程

$$(3x^2+x-1)y''-(9x^2+9x-2)y'+(18x+3)y=0$$

不恒等于零的一个解(若能猜出解的形式会有所帮助)。

（2）设 $y=f(x)$ 是非齐次方程

$$(3x^2+x-1)y''-(9x^2+9x-2)y'+(18x+3)y=6(6x+1)$$

的解，且 $f(0)=1$，$[f(-1)-2][f(1)-6]=1$。试求出整数 a、b、c，使得 $[f(-2)-a][f(2)-b]=c$。

31．设$*$是集S上的一种二元运算，且$\forall x,y\in S$，$*$满足下列运算法则

$$x*(x*y)=y \quad (1)$$
$$(y*x)*x=y \quad (2)$$

求证$*$符合交换律，但不符合结合律。

32．设整数集合$a_1,a_2,\cdots a_{2n+1}$，如果去掉其中任意一个，剩下的分两个各含n个整数其和相等的集合，证明：$a_1=a_2=\cdots=a_{2n+1}$。

33．设$p(x)$是实系数多项式，且构成多项式$Q(x)=(x^2+1)p(x)p'(x)+x([p(x)]^2+[p'(x)]^2)$，给定方程$p(x)=0$有$n$个不同的大于1的实根，证明或否定方程$Q(x)=0$至少有$2n-1$个不同实根。

34．求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n^5}\sum\limits_{h=1}^{n}\sum\limits_{K=1}^{n}(5h^4-18h^2K^2+5K^4)\right]$

35．计算$\int_0^{\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}(\pi x)-\operatorname{arctg}x}{x}\,dx$。

36．用$\exp(t)$表示e^t

$$F(x)=\frac{x^4}{\exp(x^3)}\int_0^x\int_0^{x-u}\exp(u^3+v^3)\,du\,dv$$

试求$\lim\limits_{x\to\infty}F(x)$，或证明它不存在。

37．假设微分方程

$$y'''+p(x)y''+q(x)y'+r(x)y=0$$

有解$y_1(x)$，$y_2(x)$，$y_3(x)$，使$y_1^2(x)+y_2^2(x)+y_3^2(x)=1$对所有实数$x$成立。设$f(x)=(y_1'(x))^2+(y_2'(x))^2+(y_3'(x))^2$，求出常数$A$、$B$，使得$f(x)$是微分方程

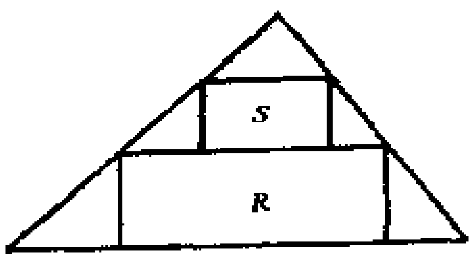
$$y'+Ap(x)y=Br(x)$$

的解。

38．用$\|u\|$表示实数u到最近整数的距离（例如$\|2.8\|=0.2=\|3.2\|$），对正整数n，设$a_n=\frac{1}{n}\int_1^n\left\|\frac{n}{x}\right\|dx$试求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$。$\left(\text{可以利用恒等式：}\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots=\frac{\pi}{2}\right)$

39．求$(u-v)^2+\left(\sqrt{2-u^2}-\frac{9}{v}\right)^2$，其中$0<u<\sqrt{2}$，$v>0$的最小值。

40．设T是锐角三角形，在T中内切一对长方形R和S如左图所示；设$A(x)$表示多边形x的面积，试求出



$$\frac{A(R)+A(S)}{A(T)}$$

的最大值或证明最大值不存在。其中T取遍任意三角形，R和S取遍所有如上所示的长方形。

41．设$I_m=\int_0^{2\pi}\cos x\cdot\cos 2x\cdots\cos mx\,dx$，问哪些整数$m$，$1\leqslant m\leqslant 10$，可使得$I_m\neq 0$。

42．假设$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$为已知，试计算$\int_0^{\infty}t^{-1/2}\cdot e^{-1985(t+t^{-1})}dt$之值。

43．试求$f(x)=x^3-3x$在集合$\{x:\ x^4+36\leqslant 13x^2\}$上的最大值，并给以说明。

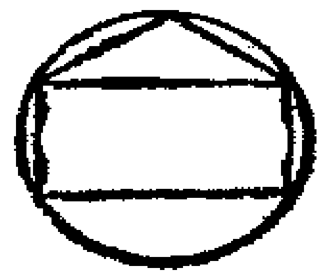
44．假设$f_1(x)$，$f_2(x)$，$\cdots$，$f_n(x)$是n个实变量$x=(x_1,$

$x_2, \cdots, x_n$)的函数，在R^n中处处有二阶连续偏导数，假设进一步有常数c_{ij}使得

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}-\frac{\partial f_j}{\partial x_i}=c_{ij} \qquad \text{对所有} i, j, 1 \leqslant i \leqslant n, \ 1 \leqslant j \leqslant n$$

证明：存在函数$g(x)$定义在R^n上，使得$f_i+\frac{\partial g}{\partial x_i}$关于所有$i$是线性的。($1 \leqslant i \leqslant n$)

(一个线性函数是指具有形式$a_0+a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$)



45．在单位圆中内接一底为b高为h的长方形和一底为b的等腰三角形，如图所示。问h为何值时长方形与三角形有相同的面积。

46．设$\boldsymbol{G}(x,y)=\left\{\frac{-y}{x^2+4y^2}, \frac{x}{x^2+4y^2}, 0\right\}$

证明或否定存在一个向量函数

$$\mathbf{F}=\{M(x,y,z), \ N(x,y,z), \ P(x,y,z)\}$$

满足如下性质

(i) 对于所有$(x,y,z) \neq (0,0,0)$，M、N、P具有连续的偏导数。

(ii) $\operatorname{rot}\mathbf{F}=\mathbf{O}$，$(x,y,z) \neq (0,0,0)$

(iii) $\mathbf{F}(x,y,0)=\boldsymbol{G}(x,y)$

47．计算$\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}\,dx}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}$

48．假设R是由笛卡尔平面中同时满足$|x|-|y| \leqslant 1$和$|y| \leqslant 1$的点(x,y)所组成的区域，画出区域R的草图，并求

其面积。

49． 微分学中一个并不罕见的错误是将乘积的求导法则理解成$(f\cdot g)'=f'\cdot g'$，若$f(x)=e^{x^2}$，问是否存在一个开区间(a,b)以及定义于(a,b)上的一个非零函数$g(x)$，使得这一错误的乘积求导法则对(a,b)中的x是成立的。

提 示 与 答 案

1． 将给定的方程 $$F(x)+F\left(\frac{x-1}{x}\right)=1+x \qquad (1)$$

中的x改写为$\frac{x-1}{x}$，并整理得

$$F\left(\frac{x-1}{x}\right)+F\left(\frac{-1}{x-1}\right)=\frac{2x-1}{x} \qquad (2)$$

(1)中x改写为$\frac{-1}{x-1}$，整理得

$$F\left(\frac{-1}{x-1}\right)+F(x)=\frac{x-2}{x-1} \qquad (3)$$

由(1)+(3)−(2)得：$2F(x)=1+x+\frac{x-2}{x-1}-\frac{2x-1}{x}$

因而有 $$F(x)=\frac{x^3-x^2-1}{2x(x-1)} \qquad (4)$$

由于(1)，(2)，(3)，(4)等价，从而(4)是(1)的唯一解。

2． 要证 $$\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}=e^n-\frac{1}{n!}\int_0^n (n-t)^n e^t\,dt>\frac{e^n}{2}$$

即等价地证明：$n! > 2e^{-n}\int_0^n (n-t)^n e^t dt$

$$\int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt > 2e^{-n}\int_0^n (n-t)^n e^t dt$$

令 $u=n-t$，上式化为

$$\int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt > 2\int_0^n u^n e^{-u} du$$

等价于
$$\int_n^{\infty} u^n e^{-u} du > \int_0^n u^n e^{-u} du$$

设 $f(u)=u^n e^{-u}$，则只要证明下式即可

$$f(n+h) \geqslant f(n-h), \quad 当 0 \leqslant h \leqslant n$$

即等价于 $(n+h)^n e^{-h} \geqslant (n-h)^n e^h$

$$n\ln(n+h) - h \geqslant n\ln(n-h) + h$$

设 $g(h)=n\ln(n+h)-n\ln(n-h)-2h$，则 $g(0)=0$，并且对于 $0<h<n$

$$\frac{dg}{dh} = \frac{n}{n+h} + \frac{n}{n-h} - 2 = \frac{2n^2}{n^2-h^2} - 2 > 0$$

所以当 $0<h<n$ 时，$g(h)>0$ 得证。

3. 两部分都利用平均值不等式证明。对于(1)，有

$$\frac{n+S_n}{n} = \frac{(1+1)+\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n}$$

$$> \sqrt[n]{(1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$$= \sqrt[n]{2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n}} = (n+1)^{\frac{1}{n}}$$

故得
$$n-S_n > n(n+1)^{\frac{1}{n}}$$

对于(2)，有

$$\frac{n-S_n}{n-1}=\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n-1}$$

$$>\sqrt[n-1]{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)}$$

$$=\sqrt[n-1]{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{n-1}{n}}=n^{-\frac{1}{n-1}}$$

故得 $$n-S_n>(n-1)n^{-\frac{1}{n-1}}$$

4．由柯西-许瓦尔兹不等式，有

$$[(a_1+a_2)+a_3+a_4+\cdots+a_n]^2$$
$$\leqslant[1^2+1^2+\cdots+1^2][(a_1+a_2)^2+a_3^2+\cdots+a_n^2]$$

或 $(\sum a_i)^2\leqslant(n-1)[(\sum(a_i^2)+2a_1a_2]$

或 $$\left[\frac{1}{n-1}\right](\sum a_i)^2\leqslant(\sum a_i^2)+2a_1a_2$$

由假设，就有

$$A<-(\sum a_i^2)+\frac{1}{n-1}(\sum a_i)^2\leqslant-(\sum a_i^2)$$
$$+(\sum a_i^2)+2a_1a_2=2a_1a_2$$

类似地可知对$1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$有$A<2a_ia_j$。

5．设$g(x)=\ln\left[\frac{\sin x}{x}\right]=\ln(\sin x)-\ln x$，因为当

$x>0$时$x>\sin x$，故

$$g''(x)=-\csc^2x+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2x}<0,\quad 0<x<\pi$$

所以$g(x)$的图形向下凹，因此

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i) \leqslant g\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = g(x)$$

即$\sum g(x_i) \leqslant n g(x)$，又$e^x$为增函数，所以

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{\sin x_i}{x_i} = e^{\sum g(x_i)} \leqslant e^{n g(x)} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n$$

6. （1） 0，（2） e^2

7. 对于$\varepsilon>0$，设N充分大使得对所有的$n \geqslant N$有$|x_n - x_{n-2}| < \varepsilon$，注意到对于任意的$n > N$，

$$x_n - x_{n-1} = (x_n - x_{n-2}) - (x_{n-1} - x_{n-3}) + (x_{n-2} - x_{n-4}) - \cdots \pm (x_{N+1} - x_{N-1}) \mp (x_N - x_{N-1}),$$

于是 $|x_n - x_{n-1}| \leqslant (n-N)\varepsilon + |x_N - x_{N-1}|$ 因而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0$$

8. 取对数后利用定积分定义及计算便得所求极限为$\exp(2\ln 5 - 4 + 2\operatorname{arc\,tg} 2)$。

9. 令$u = bx + a(1-x)$，则

$$I(t) = \int_0^1 [bx + a(1-x)]^t \mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b u^t \mathrm{d}u$$

$$= \frac{b^{t+1} - a^{t+1}}{(1+t)(b-a)}$$

用罗彼塔法则，当$t \to 0$时有

$$[I(t)]^{\frac{1}{t}} \to e^{-1}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}$$

10. 作变量代换$x_k \to 1 - x_k$，得

$$\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1\cos^2\left\{\frac{\pi}{2n}(x_1+\cdots+x_n)\right\}dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$=\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1\sin^2\left\{\frac{\pi}{2n}(x_1+\cdots+x_n)\right\}dx_1dx_2\cdots dx_n$$

注意到左、右两被积函数之和的积分为1，所以左、右两式都等于$\frac{1}{2}$，取极限仍为$\frac{1}{2}$。

11．由组合公式 $\binom{n+1}{r}=\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}$不难得到

$$f(x,n+1)=\frac{f(x,n)+x}{f(x,n)+1}$$

当$n\to\infty$时，若x能使$f(x,n)$收敛，记极限为$F(x)$，必满足$F(x)=\frac{F(x)+x}{F(x)+1}$，得$F^2(x)=x$，现在证明对任何正$x$都收敛于$\sqrt{x}$，当$x=0,1$显然如此，注意(可用归纳法证)

$$f(x,n)=\sqrt{x}\cdot\frac{(1+\sqrt{x})^n+(1-\sqrt{x})^n}{(1+\sqrt{x})^n-(1-\sqrt{x})^n}$$

当$0<x<1$时，记$a=(1-\sqrt{x}/(1+\sqrt{x})$，则$0<a<1$，而

$$f(x,n)=\sqrt{x}\cdot\frac{1+a^n}{1-a^n}\to\sqrt{x}$$

当$x>1$时，记$b=(\sqrt{x}-1)/(\sqrt{x}+1)$，则$0<b<1$，而

$$f(x,n)=\sqrt{x}\cdot\frac{1+(-b)^n}{1-(-b)^n}\to\sqrt{x}$$

当$x<0$，则$\sqrt{x}$为纯虚数，利用复数的三角函数式令$1+\sqrt{x}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，可得

$$f(x,n)=-\mathrm{i}\sqrt{x}\,\mathrm{ctg}\,n\theta$$

当$n\to\infty$时极限不存在，若x为其它复数，则$\sqrt{x}$的两根关于原点对称，必有一个处于右半平面，经过不太复杂的运算可知$f(x,n)$的极限存在，且等于x在右半平面的那个平方根。

12．当$t=0$时$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\neq 0$，在$t=0$的邻域$y$作为$x$的函数，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{4t^3-1}{3t^3-1}=-1-3t^2-\cdots$$

因此$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$在$t=0$处有一个极大值，所以曲线在$t=0$处有一个拐点。

速度v的大小为$v^2=\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)=(3t^2-1)^2+(4t^3+1)^2=2-6t^2+\cdots$，因此$v$在$t=0$处有一个极大值。

13．抛物线上任意一点有形如$(2mt^2,2mt)$的坐标，设AB是抛物线在A点的法线弦，$A(2mt^2,2mt)$，$B(2ms^2,2ms)$，AB的斜率是$\dfrac{1}{s+t}$，在A点的切线斜率为$\dfrac{1}{2t}$，因此$s+t=-\dfrac{1}{2t}$，AB的长L为

$$L^2=4m^2[(s^2-t^2)^2+(s-t)^2]=4m^2(s-t)^2[(s+t)^2+1]$$

用$s=-t-\dfrac{1}{2t}$代入上式得

$$L^2=4m^2\left(\frac{4t^2+1}{2t}\right)^2\frac{1+4t^2}{4t^2}=\frac{m^2}{4}\cdot\frac{(4t^2+1)^3}{t^4}\qquad(1)$$

求使L最小的 t 的值，即使

$$\frac{4t^2+1}{t^{4/3}}=4t^{2/3}+t^{-4/3}$$

最小，由导数等于零得两个驻点$t=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，因为当$t\to0$，$t\to\pm\infty$时$L\to\infty$，驻点都是最小点，（1）中两条最短的弦的任一条长为$3\sqrt{3}|m|$。

14．取四顶点$(\pm\sqrt{2}R,\ 0)$，$(0,\pm\sqrt{2}R)$，作边长为 $2R$ 的正方形。令椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad (0\leqslant b\leqslant a\leqslant\sqrt{2}R) \qquad (1)$$

与正方形四边$|x\pm y|=\sqrt{2}R$相切，则

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(\sqrt{2}R\mp x)^2}{b^2}=1$$

有重根，由它的判别式等于零可得

$$a^2+b^2=2R^2$$

此等式表明，当a从R增加$\sqrt{2}R$时，b从R减少到零，对应地，正方形的内切椭圆由圆变化到退化情形$-2a=2\sqrt{2}R$，$2b=0$。

将（1）写成参数形式

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

设椭圆周长为 $4L$，则

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{R^2-\frac{1}{2}c^2\cos 2t}\,dt,$$

$$(c^2=a^2-b^2)$$

令$t=\frac{\pi}{2}-t_1$，化简积分(t_1仍记t)

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sqrt{R^2-\frac{1}{2}c^2\cos 2t}+\sqrt{R^2+\frac{1}{2}c^2\cos 2t}\right)dt \tag{2}$$

设$u\in[0,p]$，作函数

$$f(u)=\sqrt{p-u}+\sqrt{p+u}$$

因为$f'(u)=-\frac{1}{2\sqrt{p-u}}+\frac{1}{2\sqrt{p+u}}<0$，所以$f(u)$在$[0,p]$上是减函数。由此可知，(2)右边的被积函数当$c=0$时取最大值，这就证明了内切于正方形的一切椭圆中，以圆的周长为最大。

上面我们直观地认为正方形的内切椭圆的长短轴是位于正方形的对角线上，这个事实可如下证明：

在u-v平面上作$u=\pm R$，$v=\pm R$围成正方形，其内切椭圆方程设为

$$Au^2+Buv+Cv^2+Du+Ev+F=0 \tag{3}$$

其中

$$4AC-B^2>0 \tag{4}$$

由$u=R$是(3)的切线，所以

$$Cv^2+(BR+E)v+(AR^2+DR+F)=0$$

应有重根，由此可得

$$(BR+E)^2-4C(AR^2+DR+F)=0 \tag{5}$$

同理可得

$$(-BR+E)^2-4C(CR^2-DR+F)=0 \tag{6}$$

$$(BR+D)^2-4A(CR^2+ER+F)=0 \tag{7}$$

$$(-BR+D)^2-4A(CR^2-ER+F)=0 \tag{8}$$

由(5)－(6)及(7)－(8)消去$R(\neq 0)$得

$$\begin{cases}-2CD+BE=0\\BD-2AE=0\end{cases}\tag{9}$$

由(4)知 $\begin{vmatrix}-2C & B\\B & -2A\end{vmatrix}\neq 0$

故(9)关于D、E仅有零解 $D=E=0$，于是(5)、(7)分别化为

$$\begin{cases}B^2R^2-4CAR^2-4CF=0\\B^2R^2-4CAR^2-4AF=0\end{cases}\tag{10}$$

若$F=0$，即(10)化为$B^2-4AC=0$这与(4)矛盾，故$F\neq 0$。于是从(10)推得$A=C$。而(3)、(4)化为

$$Au^2+Buv+Av^2+F=0,\quad 4A^2-B^2>0$$

此椭圆的长短轴显然位于$u\pm v=0$上，亦即位于已知正方形的二对角线上。

15．(1)用简单微分法。

(2)用归纳法，当$n=1$时即为(1)。

现在当$n+1$时的表达式与当n时的表达式的比为$|\sin 2^n\theta\cdot\sin 2^{n+1}\theta|$，因为$\theta=\frac{\pi}{3}$得$2^n\theta\equiv\frac{2\pi}{3}$或$\frac{4\pi}{3}\pmod{2\pi}$这比值当$\theta=\frac{\pi}{3}$时为极大。由归纳法，则全体表达式为极大。

(3)置$\theta=\frac{\pi}{3}$，(2)的表达式恰好等于$\left(\frac{3}{4}\right)^{3n/2}$；它的$\frac{2}{3}$次幂为$\left(\frac{3}{4}\right)^n$，这是极大值；通常(2)的表达式的$\frac{2}{3}$次幂$\leqslant\left(\frac{3}{4}\right)^n$，为了从这里导出(3)，增加两端因子$\sin\theta$与$\sin 2^n\theta$的幂次；因$|\sin\theta|\leqslant 1$，这只能使乘积减少。

16. 我们证明$a=e^{-1}$. 因为$f'-f=(fe^{-x})'\cdot e^x$及$x\geqslant 0$时$e^x\geqslant 1$，故有

$$\int_0^1|f'-f|\,dx=\int_0^1|(fe^{-x})'e^x|\,dx\geqslant\int_0^1(fe^{-x})'dx=(fe^{-x})\Big|_0^1=e^{-1}$$

为了断定e^{-1}是最大下界，定义函数$f_a(x)$：

当$0\leqslant x\leqslant a$时，$f_a(x)=(e^{a-1}/a)x$，当$a\leqslant x\leqslant 1$时，$f_a(x)=e^{x-1}$。令$m=\dfrac{e^{a-1}}{a}$，则有

$$\int_0^1|f_a'(x)-f_a(x)|\,dx=\int_0^a|m-mx|\,dx$$

$$=m\left(a-\frac{a^2}{2}\right)=e^{a-1}\left(1-\frac{a}{2}\right)$$

当$a\to 0$时上式$\to\dfrac{1}{e}$. 函数$f_a(x)$虽无连续导数，但可以磨除其隅角，使积分值的变化保持为任意小，这就表明比$\dfrac{1}{e}$更大的数不可能成为一个上界。

17. 若六点有三点共线，例如B位于线段AC上，则$|AC|\geqslant 2|BC|$与$|AC|\geqslant 2|AB|$总有一个成立，因而命题正确。今对任三点不共线进行讨论。

若六点只构成凹六边形，则其中必有一点(设A)位于其它五点构成的某个三角形（设为$\triangle BCD$）内。考察$\triangle BAC$，$\triangle CAD$，$\triangle DAB$即知其中必有一个内角不小于$120°$，不妨认为$\angle BAC\geqslant 120°$，$b\geqslant c$，对$\triangle ABC$应用余弦定理，注意$-\cos A\geqslant\dfrac{1}{2}$即得

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\geqslant b^2+c^2+bc\geqslant 3c^2$$

因此$a \geqslant \sqrt{3}c$。

若六点构成凸六边形，则此六边形为必有一内角不小于120°的钝角。由上面的论证可知，我们所需要的三角形显然存在。

18. 只有三个零点：0，1和某个$x>1$。

19. （1）令$G(t)=2\int_0^t f(x)\mathrm{d}x-[f(x)]^2, t\in[0,1]$

则$G(0)=0$，$G'(t)=2f(t)[1-f'(t)]\geqslant 0$，所以$G(t)\geqslant 0$且$f(t)G(t)\geqslant 0$

令$F(t)=\left[\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\right]^2-\int_0^t [f(x)]^3\mathrm{d}x, t\in[0,1]$

则$F(0)=0, F'(t)=f(t)G(t)\geqslant 0$，所以$F(t)\geqslant 0$，特别是$F(1)\geqslant 0$。

仅当对于所有的$t, f(t)G(t)=F'(t)=0$时，等号成立，那么对某个K，在$[0,K]$上$f=0$且在$(K,1)$上$G'=0$时$f>0$，故仅当$K=0$或$K=1$时在$(K,1)$上$f'=1$，因为否则$f'(K)$同时有定义又没有定义。

（2）唯一的答案是$f(x)=x$。

20. 对于在S内的(a,b)，令$I(a,b)$是矩形$0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant b$上的二重积分$\iint f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，又由$(a,b)$归纳地定义一个序列$(a_n,b_n)$如下：$a_1=a, b_1=b$，当$0\leqslant b_n\leqslant a_n$时$a_{n+1}=a_n-b_n, b_{n+1}=b_n$；当$0\leqslant a_n\leqslant b_n$时$a_{n+1}=a_n, b_{n+1}=b_n-a_n$。则从此规定可知，对于所有$n$都有$I(a,b)=I(a_n,b_n)$，因为在$S$上$f$有界且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$，所以对$S$内的所有$(a,b)$都得到$I(a,b)=0$。

如果$f(x,y)$在S内不恒为零，则在某个矩形，$R=\{(x,y):c\leqslant x\leqslant d,h\leqslant y\leqslant k\}$上$f$必为正（或负）值，因而$I=\iint\limits_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$也必为正（或负）值，但这与

$$I=I(h,k)-I(h,d)-I(c,k)+I(c,d)=0$$

相矛盾，所以f在S上恒为零。

21. 当$0<k<5$时积分收敛，故在这个开区间上I_k有定义，令$x=\frac{1}{t}$，则

$$I_k=\int_\infty^0\frac{t^{-k}}{t^{-6}p(t)}\left(\frac{-\mathrm{d}t}{t^2}\right)=\int_0^\infty\frac{t^{4-k}}{p(t)}\mathrm{d}t=I_{4-k}$$

由算术平均数$\geqslant$几何平均数，知

$$\frac{x^k+x^{4-k}}{2}\geqslant\sqrt{x^k\cdot x^{4-k}}=x^2$$

故 $I_k=\frac{I_k+I_{4-k}}{2}=\int_0^\infty\frac{[(x^k+x^{4-k})/2]\mathrm{d}x}{p(x)}\geqslant\int_0^\infty\frac{x^2\mathrm{d}x}{p(x)}=I_2$

即当$k=2$时，I_k为最小。

22. 令$x=\frac{\pi}{2}-u$有

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+(\mathrm{tg}x)^{\sqrt{2}}}=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{-\mathrm{d}u}{1+(\mathrm{ctg}u)^{\sqrt{2}}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\mathrm{tg}u)^{\sqrt{2}}}{(\mathrm{tg}u)^{\sqrt{2}}+1}\mathrm{d}u$$

因此 $2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+(\mathrm{tg}x)^{\sqrt{2}}}{1+(\mathrm{tg}x)^{\sqrt{2}}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},I=\frac{\pi}{4}$.

23. $\int_0^1\frac{x^4(1-x)^4}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4-\frac{4}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{22}{7}-\pi$

24. 因为$f_0(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$，用数学归纳法易证 $f_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{k^n x^k}{k!}$，因每项均为正，有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n(1)}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!n!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^n}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^k}{k!}=e^e$$

25. $$\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\cdots\frac{k^3-1}{k^3+1}\right]$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{1\times7}{3\times3}\cdot\frac{2\times13}{4\times7}\cdot\frac{3\times21}{5\times13}\right.$$

$$\left.\cdots\cdots\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}\right]$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{k^2+k+1}{k(k+1)}\right]=\frac{2}{3}$$

26. 令和为 S，则

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+n+2}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}\left[\left(1-\frac{1}{n+3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+5}\right)\right.$$

$$\left.+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\left[\left(1-\frac{1}{n+3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+4}\right)+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\lim_{k\to\infty}\left[1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right.$$

$$\left.-\cdots-\frac{1}{k+n+1}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{h}-\frac{1}{h+2}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{h}\right)\right.$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left[1\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\cdots+\frac{1}{h}\left(\frac{1}{h+1}+\frac{1}{h+2}\right)$$

$$\left.-\frac{1}{h+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{h-1}\right)-\frac{1}{h+2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{h}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{6+3+2}{6}+\frac{12+6+4+3}{2\times 12}+\left(\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\cdots\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{4\times 6}+\cdots\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{11}{6}+\frac{25}{24}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\right]=\frac{7}{4}$$

27. 令 $q_n=p_1+p_2+\cdots+p_n(q_0=0)$，我们通过 $T=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$ 去估计 $S_N=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{n}{q_n}\right)^2(q_n-q_{n-1})$

注意到 $S_N\leqslant\frac{1}{p_1}+\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2}{q_nq_{n-1}}(q_n-q_{n-1})$

$$=\frac{1}{p_1}+\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2}{q_{n-1}}-\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2}{q_n}$$

$$=\frac{1}{p_1}+\sum_{n=1}^{N-1}\frac{(n+1)^2}{q_n}-\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2}{q_n}$$

$$\leqslant\frac{1}{p_1}+2\sum_{n=2}^{N}\frac{n}{q_n}+\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{q_n}$$

根据许瓦尔兹不等式

$$\left(\sum_{n=2}^{N}\frac{n}{q_n}\right)^2\leqslant\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2}{q_n^2}p_n\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{p_n}$$

因而 $S_N\leqslant\frac{5}{p_1}+2\sqrt{S_NT}+T$，从而得

$$\sqrt{S_N}\leqslant\sqrt{T}+\sqrt{2T+\frac{5}{p}}.$$

28. 考察函数 $g(x,y)=f(x,y)+2(x^2+y^2)$。在单位圆上，显然 $g(x,y)\geqslant1$，而在原点 $g(0,0)\leqslant1$。或者 $g(x,y)$ ＝常数，从而 $f(x,y)$ ＝常数 $-2(x^2+y^2)$，或者 $g(x,y)$ 在某个内点有一个极小值。当 $g(x,y)$ ＝常数时，不难找到那样的内点满足题目要求。而在第二种情形，令 (x_0,y_0) 是 $g(x,y)$ 的极小点，则在 (x_0,y_0) 有

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial y}=0$$

因而 $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right|\leqslant4|x_0|$，$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right|\leqslant4|y_0|$ 也可得题目的结论。

29. $c=\sqrt{\frac{2}{\omega}}$，$\omega$ 是朗斯基 $y_1y_2'-y_2y_1'$，今证它是一常数。设 $c^2=2k$，则 $\frac{z^2}{2}=ky_1y_2$，微分两次得

$$zz' = k(y_1y_2' + y_2y_1'),$$

$$zz'' + (z')^2 = k(y_1y_2'' + y_2y_1'' + 2y_1'y_2')$$

因为 $y_1'' = fy_1$, $y_2'' = fy_2$, 得

$$zz'' + (z')^2 = 2k(fy_1y_2 + y_1'y_2') = f(2ky_1y_2) + 2ky_1'y_2'$$
$$= fz^2 + 2ky_1'y_2'$$

现在 $z^3z'' + (zz')^2 = fz^4 + 2kz^2y_1'y_2'$

$$z^3z'' + k^2(y_1y_2' + y_2y_1')^2 = fz^4 + 4k^2(y_1'y_2')^2$$

$$z^3z'' + k^2(y_1y_2' - y_2y_1')^2 = fz^4$$

$$z^3z'' - fz^4 = -k^2(y_1y_2' - y_2y_1')^2 = -k^2\omega^2 = -c^4\omega^2/4 \tag{1}$$

因为 $\omega' = (y_1y_2' - y_2y_1')' = y_1y_2'' - y_2y_1''$
$= y_1(fy_2) - y_2(fy_1) = 0$

故 ω是一常数，由$c^4\omega^2/4 = 1$解出 $c = \sqrt{\dfrac{2}{\omega}}$，代入(1)得$z'' - fz = -z^{-3}$即$z'' + z^{-3} = fz$。

30. (a)尝试形如 e^{mx} 之特解，$y_1 = e^{3x}$ 为一特解再尝试多项式形式之特解，知 $y_2 = x^2 + x$ 为另一特解。于是$y = c_1e^{3x} + c_2(x^2 + x)$当$c_1, c_2$不全为零时，均为方程的不恒为零的解。

(b) 显然 $y = 2$ 为方程之一特解。故 $f(x)$ 可表成 $2 + c_1e^{3x} + c_2(x^2 + x)$的形式，由已知条件得 $c_1 = -1, c_2 = 2$。因而$f(x) = 2 - e^{3x} + 2(x^2 + x)$，$f(-2) = 6 - e^{-6}$，$f(2) = 14 - e^6$，故若令$a = 6, b = 14, c = 1$，则$(f(-2) - a)\cdot(f(2) - b) = c$显然满足。

31. 在(2)中将 x、y 互换即得

$$(x*y)*y = x \tag{3}$$

于是由(3)与(1)可得

$$(x*y)*x=(x*y)*[(x*y)*y]=y \qquad (4)$$

再由(4)与(2)可得

$$y*x=[(x*y)*x]*x=x*y$$

因此*符合交换律。

为了举出*不符合结合律的反例，令

$$S=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots\}$$

$\forall x,y\in S$，定义$x*y=-x-y \qquad (5)$

于是由 $x*(x*y)=x*(-x-y)=-x-(-x-y)=y$

$$(y*x)*x=(-y-x)*x=-(-y-x)-x=y$$

因此定义(5)适合运算法则(1)和(2)。$\forall x,y,z\in S$，我们有

$$x*(y*z)=x*(-y-z)=-x-y+z$$

$$(x*y)*z=(-x-y)*z=x+y-z$$

因此*不符结合律。

32. 所有a_i一定有以下性质：无论去掉哪个a_i，剩下的$2n$个整数的和总是偶数。一个类似的论断它们都是同余的(mod4)，并且每个a_i能成立的这种性质对于整数$\frac{a_i}{2}$(a_i是偶数)或对于整数$(a_i-1)/2$(a_i是奇数)仍然成立。继续用这种方法，对于每个K，所有的a_i是同余的(mod2^k)这仅当他们相等时才成立。

33. 结论是肯定的，可以看出$Q(x)=F(x)G(x)$，其中$F(x)=p'(x)+xp(x)=e^{-x^2/2}(e^{x^2/2}p(x))'$，$G(x)=xp'(x)+p(x)=(xp(x))'$。设$p(x)$的$n$个大于1的零点为$1<a_1<a_2<\cdots<a_n$，由Rolle定理，$F(x)$有$n-1$个零点$b_i$，$G(x)$有$n$个零点$c_i$。

$$1<a_1<b_1<a_2<b_2<\cdots<b_{n-1}<a_n$$
$$0<c_1<a_1<c_2<a_2<\cdots<c_n<a_n$$

若对所有i，$b_i\neq c_{i+1}$，则$Q(x)$有$2n-1$个不同零点，若对某些i使$b_i=c_{i+1}=r$，则

$$p'(r)+rp(r)=0=rp'(r)+p(r)$$

因此$(r^2-1)P(r)=0$而$r=b_i>1$，$P(r)=0$；$a_i<r<a_{i+1}$这与已知矛盾，故$Q(x)$至少有$2n-1$个不同零点。

34. -1

35. 原式$=\displaystyle\int_0^\infty\frac{1}{x}\operatorname{arctg}ux\Big|_{u=1}^{u=\pi}\mathrm{d}x=\int_0^\infty\int_1^\pi\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}u}{1+(xu)^2}$

$$=\int_1^\pi\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}u}{1+(xu)^2}=\frac{\pi}{2}\ln\pi$$

36. $\dfrac{2}{9}$

37. $A=B=\dfrac{2}{3}$

38. $a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}\Big[\int_{\frac{2n}{2k+1}}^{\frac{n}{k}}\Big(\frac{n}{x}-k\Big)\mathrm{d}x$

$$+\int_{\frac{n}{k+1}}^{\frac{2n}{2k+1}}\Big(k+1-\frac{n}{x}\Big)\mathrm{d}x\Big]$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\Big[\ln\frac{2k+1}{2k}-\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+1}-\ln\frac{2k+2}{2k+1}\Big]$$

$$=\ln\prod_{k=1}^{n-1}\frac{(2k+1)^2}{2k(2k+2)}$$

$$=\ln\Big[\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\frac{2n-1}{2n}\Big]$$

故 $$\lim_{n\to\infty} a_n = \ln\frac{4}{\pi}$$

39. 8

40. 最大值$\frac{2}{3}$

41. $m=3,4,7,8$

42. 设 $I(x)=\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-at-xt^{-1}}dt$，其中$a=1985$

则 $I'(x)=-\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-at-xt^{-1}}t^{-1}dt=-\int_0^\infty t^{-\frac{3}{2}}e^{-at-xt^{-1}}dt$

令$u=\frac{1}{t}$得

$$I'(x)=-\int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}}e^{-au^{-1}-u}du$$

令$\omega=\frac{x}{a}u$得

$$I'(x)=-\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty \omega^{-\frac{1}{2}}e^{-x\omega^{-1}-a\omega}d\omega=-\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{2}}I(x)$$

于是得 $\ln I(x)=-2(ax)^{\frac{1}{2}}+c$或$I(x)=ke^{-2(ax)^{1/2}}$

$$k=I(0)=\int_0^\infty t^{-1/2}e^{-at}dt=2\int_0^\infty e^{-at^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}$$

由此得 $I(a)=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}e^{-2a}$

43. f的最大值为$\max\{f(-2),f(3)\}=18$

44. 注意到$c_{ji}=-c_{ij}$，令$h_i=\frac{1}{2}\sum_j c_{ij}x_j$，

所以 $$\frac{\partial h_i}{\partial x_j}=\frac{1}{2}c_{ij}$$

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j}-\frac{\partial h_j}{\partial x_i}=c_{ij}=\frac{\partial f_i}{\partial x_j}-\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

因此 $\quad \frac{\partial(h_i-f_i)}{\partial x_j}=\frac{\partial(h_j-f_j)}{\partial x_i}$，（对所有 i,j）

故 $(h_1-f_1,\cdots,h_n-f_n)$ 是一梯度，于是存在一函数 g 使得 $\frac{\partial g}{\partial x_i}=h_i-f_i$，换句话说，$f_i+\frac{\partial g}{\partial x_i}=h_i$ 是线性的。

45．$h=\frac{2}{5}$

46．注意除以 (x,y,z) 在 z 轴上，有 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{O}$，如果 $\boldsymbol{F}$ 存在，由stokes定理

$$\int_c \boldsymbol{G}(x,y)\cdot d\boldsymbol{r}=\int_c \boldsymbol{F}(x\cdot y\cdot z)\cdot d\boldsymbol{r}=\iint_s \mathrm{rot}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,ds=0$$

其中 c 是椭圆 $x^2+4y^2=1, z=0$，在 xy 平面上，s 是椭球 $z\geqslant 0$ 的一部分 $x^2+4y^2+z^2=1$，然而积分不为零。例如在 c：$x^2+4y^2=1$ 上

$$\int_c \boldsymbol{G}(x\cdot y)\cdot d\boldsymbol{r}=\int_c(-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j})\cdot d\boldsymbol{r}=\iint_E 2\,dx\,dy$$

$$=2(E\text{的面积})$$

其中 E 为 c 的内部，故 $\boldsymbol{F}$ 不存在。

47．方法一．作变换 $9-x=y+3$

则 $$I=\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}dx$$

$$=\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(y+3)}}{\sqrt{\ln(y+3)}+\sqrt{\ln(9-y)}}dy$$

故　$2I=\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(x+3)}+\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(x+3)}+\sqrt{\ln(9-x)}}dx=2$，所以$I=1$。

方法二。更一般地

$$S=\int_a^b\frac{f(x)\,dx}{f(x)+f(a+b-x)}$$

则

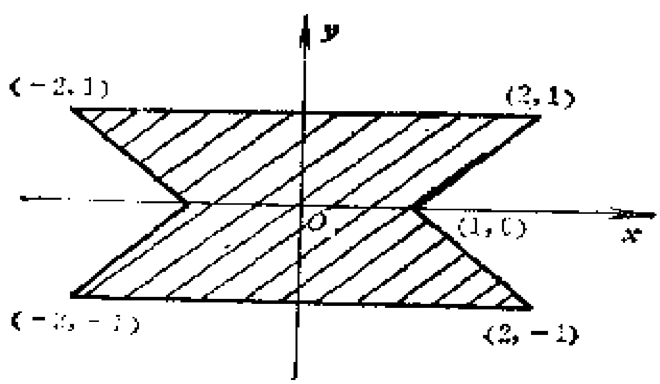
$$S=\int_a^b\left(1-\frac{f(a+b-x)}{f(x)+f(a+b-x)}\right)dx$$

$$=(b-a)-\int_b^a\frac{f(t)\,(-dt)}{f(a+b-t)+f(x)}$$

$$=(b-a)-s$$

故　$S=\frac{b-a}{2}$。本题中$f(x)=\sqrt{\ln(9-x)}$，$a=2,b=4$，故$S=1$。

48．面积为6。



49．若$\frac{1}{2}<a<x<b$，$g(x)=e^x\sqrt{2x-1}$；

若$a<x<b<\frac{1}{2}$，$g(x)=e^x\sqrt{1-2x}$。

苏联部分

1. 作函数的图象

(1) $y=\lim\limits_{n\to\infty}(x-1)\operatorname{arctg}x^n$ (2) $y=x^x$ $(x>0)$

2. 试求出在 $x=1$ 取极大值6，在 $x=3$ 取极小值 2 的次数最低的多项式。

3. 设 $P(x)$ 为 n 次多项式，且 $P(a)\geqslant0, P'(a)\geqslant0,\cdots\cdots P^{(n-1)}(a)\geqslant0, P^{(n)}(a)>0$。证明方程 $P(x)=0$ 的实根不会大于 a。

4. 证明序列 $2, 2+\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}},\cdots$ 存在极限，并求出该极限。

5. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)$。

6. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{K^3+6K^2+11K+5}{(K+3)!}$。

7. 求 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin(e^x-1)-(e^{\sin x}-1)}{\sin^4(3x)}$。

8. 设 $f(x)$ 为偶函数，x 定义于区间 $[-a,a]$ 上且在0点有一切阶导数，证明这个函数在 0 点的一切奇数阶导数等于零。

9. 设 $f(x)$ 在半轴 $(0,+\infty)$ 上连续可微，$f(0)=1$，且对一切 $x\geqslant0$ 有 $|f(x)|\leqslant e^{-x}$，则存在点 x_0 使得 $f'(x_0)=-e^{-x_0}$。

10. 连续函数 $f(x)$ 称为是凸的，如果对任意 a、b 有

$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\geqslant\frac{1}{2}[f(a)+f(b)]$，试证若 $f(x)$ 是凸函数，则

（1）$f\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)\geqslant\frac{1}{n}[f(a_1)+\cdots+f(a_n)]$

（2）$f\left(\sum\limits_{i=1}^{n}p_i a_i\right)\geqslant\sum\limits_{i=1}^{n}p_i f(a_i)$，其中 $p_i>0,\sum\limits_{i=1}^{n}p_i=1$

11. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & 当\ x\neq 0\\ 0, & 当\ x=0\end{cases}$ 而函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可微，证明函数 $f[\varphi(x)]$ 在 $x=0$ 处可导且导数为零。

12. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可微，λ 为实数，证明：当且仅当 $f'(x)e^{\lambda x}$ 非降时，有函数 $f'(x)+\lambda f(x)$ 为非降。

13. 有一条曲线，使得由该曲线 $r=r(\varphi)$ 本身及极半径 $\varphi=0,\varphi=\varphi_1$ 所围成的面积可由公式 $\theta=\frac{1}{4}r^2(\varphi_1)$ 算得。

14. 空间物体 T_r 由所有到给定的凸多边形 S 的距离不超过 r 的点所组成，设 $V(r)$ 为其体积，求 $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{V(r)}{r^3}$。

15. 求 $\int(-1)^{[x]}\mathrm{d}x$。

16. $f(x)$ 在整个实数轴上连续且恒为正，已知对一切 t，$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|t-x|}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 1$，证明对一切 a 与 $b(a<b)$ 有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{b-a}{2}+1.$$

17. 证明：对于 $[a,b]$ 上的连续可微函数 $f(x)$，如果 $f(a)=f(b)=0$，$\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x$。

18. 研究积分的收敛性：$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^{\alpha}\sin^2 x}$。

19. 证明：如果在$(-\infty,+\infty)$上连续的函数$f(x)$满足关系式$\int_x^{x+1}f(t)\,dt=0$，则$f(x)$为周期函数。

20. 计算$\oint_L\frac{X\,dY-Y\,dX}{X^2+Y^2}$，其中$X=ax+by$，$Y=cx+dy$，$ad-bc\neq 0$，$L$为环绕着坐标原点的简单闭曲线。

21. 讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_n^2}$的收敛性，其中$\{x_n\}$为方程$x=\operatorname{tg}x$的正根按递增顺序编号而得到的序列。

22. 将级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$的前$N$项分成两部分，即$S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin n}{n}=S_N^{+}+S_N^{-}$，其中$S_N^{+}$与$S_N^{-}$为相应的正项与负项和，证明极限$\lim_{N\to\infty}\frac{S_N^{+}}{S_N^{-}}$存在，并求出它。

23. 给定级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\ (a_n>0)$，设极限$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=q$存在，若$q>1$则级数收敛，若$q<1$则级数发散。

24. 求出级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$之和。

25. 确定级数的收敛区域$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{\sin n}\right)^n$。

26. 将函数$y=\sin\left(\arcsin\dfrac{x}{\pi}\right)$展成傅立叶级数。

27. 求出级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n!}$之和。

28. 用初等函数以及它们的不定积分表示出微分方程$y''-xy'-y=0$的一般解。

29. 解微分方程$y'=\dfrac{1}{2x-y^2}$。

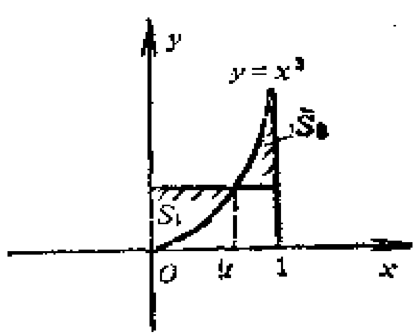
30. 找出方程$y''+p(x)y'+q(x)y=0$具有线性无关的解y_1与$y_2=(y_1)^2$的充分必要条件。

31. 确定函数$f(x)=2e^{2-x^2}(x^6-3x^4+5x^2-1)-2e-5$的实零点数目。

32. 证明不等式

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}\left(1-e^{-\frac{1}{2}a^2}\right)}<\int_0^a e^{-\frac{1}{2}x^2}dx<\sqrt{\frac{\pi}{2}\left(1-e^{-a^2}\right)}$$

33. 求出满足函数方程$f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$的所有可微函数。



34. 在区间[0，1]上给定函数$y=x^2$，问当t位于什么位置时，图中阴影部分S_1与S_2的面积之和最小？何时最大？

35. 在平面上有点A_1，…，A_n，设O为该点系的重心，证明：所有满足条件

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n}|MA_k|^2=c>c_0=\sum_{1\leqslant k\leqslant n}|OA_k|^2$$

的点M构成的集合就是以O为圆心，$R=\sqrt{\dfrac{c-c_0}{n}}$为半径的圆。

36． 由一点引三个不共面的向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，证明：通过这三个向量端点的平面与向量$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$相垂直。

37． 在平面上给定一条线段AB和一个点$C\notin AB$。试求出图形ϕ：

$$\phi=\{M:\rho(M,C)=\rho(M,AB)\}$$

其中$\rho(M,C)$是点M到C间的距离，$\rho(M,AB)$是点M与AB的距离，即由点M到线段AB上的点之间的最短距离。

38． $\prod_{n=1}^{25}\left(1-\dfrac{n}{365}\right)$与$\dfrac{1}{2}$哪个大？

39． 试求值

$$\frac{1+\dfrac{\pi^4}{5!}+\dfrac{\pi^8}{9!}+\dfrac{\pi^{12}}{13!}+\cdots}{\dfrac{1}{3!}+\dfrac{\pi^4}{7!}+\dfrac{\pi^8}{11!}+\dfrac{\pi^{12}}{15!}+\cdots}$$

40． 求出一切定义于$(-\infty,+\infty)$上的具有下述性质的可微函数$f(x)$：对任意x与$y(x\neq y)$，对某固定的$\alpha\geqslant0,\beta\geqslant0,\alpha+\beta=1$有

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(\alpha y+\beta x)$$

41． 数列$\{a_n\}$的项按下述方式定义：

$$a_1=1,\ a_n=\frac{1}{n!}+\frac{a_1}{(n-1)!}+\frac{a_2}{(n-2)!}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{1!}$$

$(n>1)$

证明：$a_n = \frac{1}{2(\ln 2)^{n+1}} + 0\left(\frac{1}{(\ln 2)^{n+1}}\right)$，当$n\to\infty$。

42． 证明，如果函数$u(x)$在正半轴$x>0$上连续可微，当$x\geqslant 1$时$u(x)=0$，而积分$\int_0^{\infty} x(u'(x))^2 dx$收敛，那么：当$h\to 0^+$时

$$J(h)=\int_h^{+\infty} u'(x+h)(u(x+h)-u(x))dx\to 0$$

提示：可以利用布涅可夫斯基不等式：对$[a,b]$上连续的函数f,g有

$$\left(\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)$$

43． 计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_1^n \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx.$$

提示与答案

1． （1）分四种情况讨论：$x>1$，$x=1$，$|x|<1$，$x\leqslant -1$，分别得函数为$y=\frac{\pi}{2}(x-1)$，0，0及不存在。

（2）由$y=e^{x\ln x}$，当$x\to 0^+$时$y\to 1$，$x\to+\infty$时$y\to+\infty$，$x=\frac{1}{e}$为极小点，$y''>0$曲线向上凹。

2． 因$P'(1)=P'(3)=0$，$P'(x)$的次数$\geqslant 2$，故$P(x)$是不低于3次的多项式，设$p'(x)=A(x-1)(x-3)$，由

$P''(x)|_{x=1}<0$ 与 $P''(x)|_{x=3}>0$ 知 $A<0$，由此得

$$p(x)=A\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)+B$$

由已知得 $B=2$，$A=3$。

3． 用 $x=a$ 时的台劳公式，$P(x)$ 可写成

$$P(x)=P(a)+P'(a)(x-a)+\cdots+\frac{P^{(r)}(a)}{r!}(x-a)^r$$

$$+\cdots+\frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

由题设便知，当 $x>a$ 时 $P(x)>0$，故 $P(x)$ 不可能有超过 a 的根。

4． 如果极限存在，则应符合关系式 $A=2+\frac{1}{A}$. 由此得 $A=1+\sqrt{2}$，用 $1+\sqrt{2}+\delta_n$ 表序列的第 n 项，则 $\delta_{n+1}=\frac{\delta_n(1-\sqrt{2})}{1+\sqrt{2}+\delta_n}$，且 $|\delta_n|<1$，我们有

$$|\delta_{n+1}|\leqslant|\delta_n|\left|\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right|\leqslant\frac{1}{2}|\delta_n|,\quad \text{由于}\ \delta_1=1-\sqrt{2},$$

$|\delta_1|<\frac{1}{2}$，从而 $|\delta_n|<\frac{1}{2^n}$，$|\delta_n|\to 0\ (n\to\infty$ 时)，由此得知极限 A 确实存在且等于 $1+\sqrt{2}$。

5． 由 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{2^{i/n}}{n+\frac{1}{i}}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{2^{i/n}}{1+\frac{1}{ni}}$，当 $i\geqslant 2$ 时 $\frac{2^{i/n}}{1+\frac{1}{ni}}=2^{(i-1)/n}$

$\times \dfrac{2^{i/n}}{1+\dfrac{1}{ni}} \geqslant 2^{(i-1)/n} \dfrac{1+\dfrac{\ln 2}{n}}{1+\dfrac{1}{ni}} > 2^{(i-1)/n}$，从而$\dfrac{2^{i/n}}{1+\dfrac{1}{ni}} = 2^{\xi_i}$，

$\xi_i \in \left[\dfrac{i-1}{n}, \dfrac{i}{n}\right]$于是所求极限就是$\int_0^1 2^x \mathrm{d}x = \dfrac{1}{\ln 2}$。

6. 由$K^3+6K^2+11K+5=(K+1)(K+2)(K+3)-1$，于是和可改写为 $S_n=\sum\limits_{K=1}^{n}\left(\dfrac{1}{K!}-\dfrac{1}{(K+3)!}\right)=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{(n+1)!}-\dfrac{1}{(n+2)!}-\dfrac{1}{(n+3)!}$极限为$\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\dfrac{5}{3}$。

7. 1

9. 考察函数$\varphi(x)=f(x)-e^{-x}$，$\varphi(0)=0$，当 $x\geqslant 0$ 时$\varphi(x)\leqslant 0$，当 $x\to+\infty$时 $\varphi(x)\to 0$，故存在 x_0，使 $\varphi(x)$在 $x=x_0$取极小值$\varphi'(x_0)=0$即得$f'(x_0)=-e^{-x_0}$。

10. 对K进行归纳法，容易证明当$n=2^K$时(a)成立。下设n为任何整数，$n<2^{K_1}$，$n+K=2^{K_1}$，则

$$f\left(\frac{a_1+\cdots+a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+K}}{n+K}\right)$$

$$\geqslant \frac{1}{n+K}\left(f(a_1)+\cdots+f(a_{n+K})\right)$$

令 $a_{n+1}=\cdots=a_{n+K}=\dfrac{1}{n}(a_1+\cdots+a_n)$，则

$$f\left(\frac{a_1+\cdots+a_n+\dfrac{K}{n}(a_1+\cdots+a_n)}{n+K}\right)$$

$$\geqslant \frac{1}{n+K}\left(f(a_1)+\cdots+f(a_n)+Kf\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)\right)$$

即 $f\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)\geqslant\frac{1}{n+K}(f(a_1)+\cdots+f(a_n))$

$$+\frac{K}{n+K}f\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)$$

$$f\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)\geqslant\frac{1}{n}(f(a_1)+\cdots+f(a_n))$$

再利用$f(x)$的连续性，不难证明(b)。

11\. 利用导数定义证明。

12\. 记$f'(x)+\lambda f(x)=h(x)$，$f'(x)e^{\lambda x}=g(x)$所以$h(x)\cdot e^{\lambda x}=(f(x)e^{\lambda x})'$，$g(x)e^{-\lambda x}=f'(x)$可得

$$g(x)=h(x)e^{\lambda x}-\lambda\int_0^x h(y)e^{\lambda y}dy-\lambda f(0)$$

$$h(x)=g(x)e^{-\lambda x}+\lambda\int_0^x g(y)e^{-\lambda y}dy+\lambda f(0)$$

假如$h(x)$非降，则当$y<x$时就有

$$\begin{aligned}g(y)-g(x)&=(h(y)e^{\lambda y}-h(x)e^{\lambda x})-\lambda\int_x^y h(t)e^{-\lambda t}dt\\&=(h(y)e^{\lambda y}-h(x)e^{\lambda x}-\lambda h(z)\int_x^y e^{\lambda t}dt\\&=(h(y)-h(z))e^{\lambda y}+(h(z)-h(x))e^{-\lambda x}\end{aligned}$$

其中$x<z<y$，从而$g(y)-g(x)\geqslant0$，即$g(x)$非降，反之可类似证明，若$g(x)$非降，则有$h(x)$非降.

13\. $r(\varphi)=ce^{\varphi}$，$c>0$。

14\. 设P为S中任一点，则以P为心，r为半径的球全部含于T_r中，因此$V(r)\geqslant\frac{4}{3}\pi r^3$，设$P$到$S$中其它点的最大距离为$d$，则$T_r$含于以$P$为心，以$r+d$为半径的球中，从而$V(r)\leqslant\frac{4}{3}\pi(r+d)^3$，于是 $\frac{4}{3}\pi\leqslant\frac{V(r)}{r^3}\leqslant\frac{4}{3}\pi\left(1+\frac{d}{r}\right)^3$，

故 $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{V(r)}{r^3}=\dfrac{4}{3}\pi$.

16. 函数 $F(t)=\int_a^b e^{-|t-x|}f(x)\,dx$ 连续，因而存在

$$\int_a^b F(t)\,dt=\int_a^b f(x)\,dx\int_a^b e^{-|t-x|}dt$$
$$=\int_a^b f(x)(2-e^{a-x}-e^{x-b})\,dx$$

由于 $F(t)\leqslant 1$，故有

$$2\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b e^{a-x}f(x)\,dx-\int_a^b e^{x-b}f(x)\,dx\leqslant b-a$$

由此得 $\int_a^b f(x)\,dx\leqslant\frac{1}{2}(b-a)+\frac{1}{2}\int_a^b e^{-|a-x|}f(x)\,dx$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b e^{-|b-x|}f(x)\,dx\leqslant\frac{1}{2}(b-a)+1.$$

17. 设 $x\in(a,b)$，则 $f(x)=f'(\theta_1)(x-a)=f'(\theta_2)(x-b)$，其中 $\theta_1\in(a,x)$，$\theta_2\in(x,b)$，因而 $|f(x)|\leqslant M(x-b)$，$|f(x)|\leqslant M(b-x)$。其中 $M=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|$。则

$$\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b|f(x)|\,dx\leqslant\frac{4}{(b-a)^2}\left(\int_a^{\frac{1}{2}(a+b)}M(x-a)\,dx\right.$$
$$\left.+\int_{\frac{1}{2}(a+b)}^b M(b-x)\,dx\right)=\frac{4}{(b-a)^2}\left(\frac{1}{8}(b-a)^2M\right.$$
$$\left.+\frac{1}{8}(b-a)^2M\right)=M$$

18. 积分的收敛性等价于下面级数的收敛性

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{1+x^{\alpha}\sin^2x}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{dt}{1+(n\pi+t)^{\alpha}\sin^2t}$$

该级数的一般项u_n显然满足不等式

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}t}{1+((n+1)\pi)^\alpha \sin^2 t} \leqslant u_n \leqslant \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}t}{1+(n\pi)^\alpha \sin^2 t}$$

但

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}t}{1+b^2\sin^2 t} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+b^2\sin^2 t} \xlongequal{\text{令}y=\operatorname{tg}t} 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}y}{1+(b^2+1)y^2}$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{b^2+1}}$$

由此知$u_n \sim cn^{-\frac{\alpha}{2}}$，所以$\alpha>2$时收敛，$\alpha\leqslant 2$时发散.

21. 显然 $x_n \in \left(\frac{\pi}{2}+\pi(n-1),\ \frac{\pi}{2}+n\pi\right)$，故知 $x_n \geqslant \frac{\pi}{2}+\pi(n-1)\geqslant n$，因此$\frac{1}{x_n^2}\leqslant\frac{1}{n^2}$，所以原级数被强级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$所控制，因而收敛。

22. 根据狄里赫莱法则知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$收敛，但级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n}$发散，因为$\frac{|\sin n|}{n}\geqslant\frac{\sin^2 n}{n}$，$n=1,2,\cdots$，而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{\cos 2n}{n}\right)\text{发散。}$$

这表明$S_N^+ + S_N^- = 0(1)$，而$S_N^+ - S_N^- \to \infty\ (N\to\infty)$，由此知$S_N^+\to\infty\ (N\to\infty)$，于是$1+\frac{S_N^-}{S_N^+}=\frac{0(1)}{S_N^+}\to 0$，

即
$$\frac{S_N^-}{S_N^+}\to -1,\ (N\to\infty).$$

23. 设$q>1$，取α，使$q>\alpha>1$，则存在n_0，使当$n>n_0$时有$\ln\frac{1}{a_n}>\alpha\ln n$，即$a_n<\frac{1}{n^\alpha}$，这表明原级数被$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha>1)$所控制，故收敛。又设$q<1$，取α，使$q<\alpha<1$，则存在n_0，使当$n>n_0$时$\ln\frac{1}{a_n}<\alpha\ln n$，即$a_n>\frac{1}{n^\alpha}>\frac{1}{n}$，因而级数发散。

24. 观察

$$f(x)=\frac{1}{\ln^2 3}\sum_{n=1}^{\infty}3^{-nx}=\frac{1}{\ln^2 3}\cdot\frac{1}{3^x-1}\qquad(x>0)$$

不难发现，可对其在$(0,+\infty)$上逐项微分两次，因而有

$$f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^{nx}}=\frac{3^x(3^x+1)}{(3^x-1)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}=f''(1)=\frac{3}{2}$$

26. $$y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}\sin nx$$

27. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}=\mathrm{I_m}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{inx}}{n!}\right)=\mathrm{I_m}(e^{e^{ix}})$$

$$=\mathrm{I_m}(e^{\cos x+i\sin x})=e^{\cos x}\mathrm{I_m}(e^{i\sin x})=e^{\cos x}\sin(\sin x)$$

28. 原方程等价于$(y'-xy)'=0$，即$y'-xy=c_1$，由此知$y=c_1e^{\frac{x^2}{2}}\left(\int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt+c_2\right)$

29. $x=ce^{2y}+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}$

30. 将y_1和$y_2=(y_1)^2$分别代入方程，得到两个关系式，

消去y，得$q'-2pq+3\sqrt{2}q^{\frac{3}{2}}=0$。反之，如果$p$、$q$满足这个关系式，则原方程变为

$$\left(\sqrt{\frac{2}{q}}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y\right)\left(\sqrt{\frac{2}{q}}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2y\right)=0$$

解之得 $y_n=\exp\left(n\int\sqrt{\frac{q}{2}}\mathrm{d}x\right)\quad(n=1,2)$

31． 作变换$y=x^2$，方程变形为$f(x)=\varphi(y)\quad(y\geqslant0)$，$y=1$和$y=3$是极大点，$y=2$是极小点，且$\varphi(0)<0$，$\varphi(1)>0$，$\varphi(2)<0$，$\varphi(3)<0$，当$y\geqslant0$时$\varphi(y)$两次取零点，因而相应的$f(x)$有四个零点。

32． 记$I=\int_0^u e^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x$，则$4I^2=\int_{-u}^{u}\int_{-u}^{u}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，显然$4I^2$大于被积函数以原点为圆心、以$u$为半径的圆上的积分，而小于以原点为圆心，以$\sqrt{2}u$为半径的圆上的积分，因此有

$$2\pi\int_0^u re^{-\frac{1}{2}r^2}\mathrm{d}r<4I^2<2\pi\int_0^{\sqrt{2}u}re^{-\frac{1}{2}r^2}\mathrm{d}r$$

由此命题得证。

33． 因为$f(x)=\dfrac{f(x)+f(0)}{1-f(x)f(0)}$，故$f(0)(1+f^2(x))=0$，$f(0)=0$，进而有

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}\cdot\frac{f^2(x)+1}{1-f(x)f(\Delta x)}$$

因此当$\Delta x\to0$时$f(\Delta x)\to0$，$\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}\to f'(0)=c$，且$f'(x)=$

$c_1(1+f^2(x))$，由此得$\int_0^x \frac{dy}{1+y^2}=\int_0^x c_1 dy+c_2$, $\operatorname{arctg} f=c_1 x+c_2$，$f(x)=\operatorname{tg}(c_1x+c_2)$，考虑到$f(0)=0$，有$f(x)=\operatorname{tg} c_1 x$。显然，任何一个这样的函数满足所给定的函数方程。

34. $S_1=t^3-\int_0^t t^2 dt=\frac{2}{3}t^3$，$S_2=\frac{1}{3}-t^2+\frac{2}{3}t^3$，

$S_1+S_2=\frac{4}{3}t^3-t^2+\frac{1}{3}$，$(S_1+S_2)_{\min}=\frac{1}{4}$，于$t=\frac{1}{2}$达到，

而$(S_1+S_2)_{\max}=\frac{2}{3}$，于$t=1$达到，再考虑曲线$y=x^2$关于$x=\frac{1}{2}$的对称图形，即可完成本题的解答。

35. 考虑向量$\boldsymbol{r}_K=\boldsymbol{OA}_K$及$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{OM}$，因为$\sum_{K=1}^{n}\boldsymbol{r}_K=\boldsymbol{0}$，

所以$c=\sum_{K=1}^{n}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_K|^2=n|\boldsymbol{r}|^2+c_0$。

36. 只要证明向量$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$都垂直，我们有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})&=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\\&+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\\&-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})=0\end{aligned}$$

类似地 $$(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=0$$

如果$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=0$，不难证明$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$也共面。于是命题得证。

37. 设$|AB|=a$，选取坐标系，使$A(0,0)$，$B(a,0)$。

设$C(p,q)$，如果$q=0$，那么显然当$p>a$时ϕ由过点$\left(\frac{p+a}{2},0\right)$而垂直于$AB$的直线构成；当$p<0$时，$\phi$由过点$\left(\frac{p}{2},0\right)$而垂直于$AB$的直线构成。设$q\neq0$，如果$0\leqslant x\leqslant a$，那么$(x,y)$到$AB$的距离为$y$，从而关于$\phi$的条件可写为$y^2=(x-p)^2+(y-q)^2$或$y=\frac{q}{2}+\frac{(x-p)^2}{2q}$，于是在线段$[0,a]$上，$\phi$的图形为一段抛物线。当$x<0$时，$\phi$由线段$AC$的中垂线组成，其方程为$y=\frac{p^2+q^2}{2q}-\frac{p}{q}x$；类似地，当$x>a$时，$\phi$的图形方程为$y=\frac{p^2+q^2-a^2}{2q}-\frac{p-a}{q}x$。

38. 按几何平均与算术平均的不等式，有

$$\prod_{n=1}^{25}\left(1-\frac{n}{365}\right)\leqslant\left(\frac{352}{365}\right)^{25}=\left(1-\frac{13}{365}\right)^{25}$$

用牛顿二项式展开$\left(1-\frac{13}{365}\right)^{25}$，容易验证，它的各项的绝对值逐项减小。故

$$\left(1-\frac{13}{365}\right)^{25}\leqslant1-\frac{13\times25}{365}+\frac{13^2\times25\times24}{365^2\times2}$$

$$=1-\frac{65}{73}+\frac{169\times12}{73^2}<\frac{1}{2}$$

因此 $\prod_{n=1}^{25}\left(1-\frac{n}{365}\right)<\frac{1}{2}$.

39. 记分子为p，分母为q，易知$p\pi-q\pi^2=\sin\pi=0$，

由此知$\dfrac{p}{q}=\pi^2$.

40. 令$y=\xi-\beta h$, $x=\xi+\alpha h$, 则

$$f(\xi+\alpha h)-f(\xi-\beta h)=hf'(\xi)$$

上式对h微分两次,得

$$\alpha^2 f''(\xi+\alpha h)=\beta^2 f''(\xi-\beta h)$$

即对任何 a 与 b, 有 $\alpha^2 f''(a)=\beta^2 f''(b)$, 显然 f''为常数. 如果$\alpha^2\neq\beta^2$, 则$f''\equiv 0$, 而 $f(x)$为线性函数, 如果 $\alpha^2=\beta^2$, 即$\alpha=\beta=\dfrac{1}{2}$, 则$f(x)$为任一抛物线. 不难验证,所求的$f(x)$满足原方程.

41. 考虑函数 $f(x)=\sum\limits_{K=0}^{\infty}a_k x^k$, 其中 $a_0=1$, 并利用关系式$f(x)(e^x-1)=f(x)-1$.

42. $$|J(h)|^2\leqslant\int_h^{\infty}(x+h)(u'(x+h))^2\mathrm{d}x$$

$$\times\int_h^1\frac{(u(x+h)-u(x))^2}{x+h}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_0^{\infty}x(u'(x))^2\mathrm{d}x\int_h^1\frac{1}{x+h}\left(\int_x^{x+h}u'(\xi)\mathrm{d}\xi\right)^2\mathrm{d}x$$

由于 $$\left(\int_x^{x+h}u'(\xi)\mathrm{d}\xi\right)^2\leqslant h\int_x^{x+h}(u'(\xi))^2\mathrm{d}\xi$$

故 $$\int_h^1\frac{1}{x+h}\left(\int_x^{x+h}u'(\xi)\mathrm{d}\xi\right)^2\mathrm{d}x$$

$$\leqslant h\int_h^1\frac{1}{x+h}\left(\int_x^{x+h}(u'(\xi))^2\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}x$$

$$=h\int_h^{2h}(u'(\xi))^2\mathrm{d}\xi\int_h^{\xi}\frac{\mathrm{d}x}{x+h}+h\int_{2h}^{1}(u'(\xi))^2\mathrm{d}\xi\int_{\xi-h}^{\xi}\frac{\mathrm{d}x}{x+h}$$

$$=J_1(h_1+J_2(h))$$

当$h\to0^+$时有

$$J_1(h)=h\int_h^{2h}(u'(\xi)^2)\ln\frac{\xi+h}{2h}\mathrm{d}\xi$$

$$\leqslant\ln\frac{3}{2}\int_h^{2h}\xi(u'(\xi))^2\mathrm{d}\xi\to0$$

而 $J_2(h)=h\int_{2h}^{1}(u'(\xi)^2)\ln\frac{h+\xi}{\xi}\mathrm{d}\xi$对任给$\varepsilon>0$，选取

$\lambda=\lambda(\varepsilon)>0(\lambda<1)$，使对一切$h<\frac{\lambda}{2}$，有

$$h\int_{2h}^{\lambda}(u'(\xi))^2\ln\frac{h+\xi}{\xi}\mathrm{d}\xi\leqslant\ln\frac{3}{2}\int_0^{\lambda}\xi(u'(\xi))^2\mathrm{d}\xi<\varepsilon$$

于是当$h\to0^+$时

$$h\int_{\lambda}^{1}(u'(\xi))^2\ln\frac{h+\xi}{\xi}\mathrm{d}\xi\leqslant\ln\left(1+\frac{h}{\lambda}\right)\int_0^1\xi(u'(\xi))^2\mathrm{d}\xi\to0$$

43. 变换$t=\frac{1}{\sqrt{x}}$，此时

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\int_1^n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{\sqrt{n}}\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1}\frac{\ln(1+t)}{t^3}\mathrm{d}t$$

由于 $\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+0(t^3)$，函数$\ln(1+t)-t+\frac{t^2}{2}$在区间[0,1]上可积，这表明

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1}\frac{\ln(1+t)}{t^3}\mathrm{d}t=\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1}\frac{1-\frac{t}{2}+0(1)}{t^2}\mathrm{d}t=-\frac{1}{t}$$

$$-\frac{1}{2}\ln t\Big|_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1}+0(1)=\sqrt{n}-\frac{1}{4}\ln n+0(1)$$

因而$\frac{1}{\sqrt{n}}\int_{n}^{1}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x=2-\frac{1}{2}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}+0\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

故所求之极限等于2。

1988年高等数学竞赛试题

（北京理工大学）

一、本题共10个小题，每个小题满分为 6 分，共60分.

1. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}$。

2. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}\right)$　$(x\neq0)$.

3. 求 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$的n阶导数。

4. 求$\displaystyle\int\frac{dx}{x^6(1+x^2)}$。

5. 求$\displaystyle\int_0^a\frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$　$(a>0)$。

6. 设$x=e^u\cos v$，$y=e^u\sin v$，$z=uv$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$。

7. 求$\displaystyle\int_0^1 x^2dx\int_x^1 e^{-y^2}dy$.

8. 求$\displaystyle\oint_L\frac{1}{x}\mathrm{arctg}\frac{y}{x}dx+\frac{2}{y}\mathrm{arctg}\frac{x}{y}dy$。

其中L为由曲线$x^2+y^2=1$，$x^2+y^2=4$，$y=x$，$y=\sqrt{3}\,x$ $(y>0)$所围成的区域的边界正向。

9. 求$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$的收敛域。

10. 请在下列两题中选择一题：

（1）求$\iint\limits_{\Sigma} x^2 \mathrm{d}S$，其中$\Sigma$为$x^2+y^2+z^2=a^2$

（2）设$\int_0^x xy\mathrm{d}x = x^2+y$，求$y(x)$

二、本题共5个小题，每题满分8分，共40分。

1. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，$f(a)=0$，存在连续导数$f'(x)$，以M表示$|f'(x)|$在$[a,b]$上的最大值，证明：

$$M \geqslant \frac{2}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

2. 证明：过曲面$z=x^2+y^2+a$（$a>0$常数）上任意一点处的切平面与曲面$z=x^2+y^2$所围成空间部分的体积为一常数。

3. 计算曲面积分

$$\iint\limits_{\Sigma} 2z\mathrm{d}y\mathrm{d}z - 2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (5z-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中Σ为曲线$\begin{cases} z=\mathrm{e}^y \\ x=0 \end{cases}$（$1\leqslant y\leqslant 2$）绕$z$轴旋转一周所成曲面的外侧。

4. 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$的敛散性。已知其通项$u_n$与前$n$项部分和$S_n$有如下关系

$$2S_n^2 = 2u_nS_n - u_n \qquad (n\geqslant 2)\text{且}u_1=2$$

5. 将二重积分

$$\iint\limits_{D} (x-y)^n f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

化为定积分，其中D为$y=x_0$，$y=x$，$x=z$（$x_0<y$）所围的三角形域，并证明

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x} dx\int_{x_0}^{x} dx\cdots\int_{x_0}^{x}}_{n+1\text{次}} f(x)\,dx=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-y)^n f(y)\,dy$$

提示与答案

一、

1． 利用级数收敛的必要条件。

2． $\dfrac{\sin x}{x}$

3． $(-1)^n\cdot\dfrac{2\cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$

4． $-\dfrac{1}{7x^7}+\dfrac{1}{5x^5}-\dfrac{1}{3x^3}+\dfrac{1}{x}-\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x}+c$

5． $\dfrac{\pi}{4}$

6． $\dfrac{v\cos v-u\sin v}{e^u}$

7． $\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{3e}$

8． $\dfrac{\pi}{12}\ln 2$

9 利用比较法得$x>1$时级数收敛；$x\leqslant 1$时级数发散。

10． （1） $\iint\limits_{\Sigma}x^2dS=\dfrac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS=\dfrac{4}{3}\pi a^4$

（2） $y(x)=2(1-e^{x^2/2})$

二、

1． 利用不等式：

$|f(x)|=|f(x)-f(a)|=(x-a)|f'(\xi)|\leqslant(x-a)M$

2. 已知曲面上任意一点(x_0, y_0, z_0)的切平面与曲面$z=x^2+y^2$所围的体积用二重积分表示为

$$V=\iint\limits_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leq a}[2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+z_0$$

$$-(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

计算之得$\frac{1}{2}\pi a^2$.

3. $\pi e(4e^2-15e+2)$

4. $S_n=\dfrac{2}{1+4(n-1)}\ (n\geqslant 1)$, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=0$

5. $$\iint\limits_D (x-y)^n f(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{x_0}^{z} f(y)\,\mathrm{d}y\int_y^z (x-y)^n\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{n+1}\int_{x_0}^{z}(z-y)^{n+1}f(y)\,\mathrm{d}y$$

$$\iint\limits_D (x-y)^n f(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{x_0}^{z}\mathrm{d}x\int_{x_0}^{x}(x-y)^n f(y)\,\mathrm{d}y$$

于是有

$$\int_{x_0}^{z}\mathrm{d}x\int_{x_0}^{x}(x-y)^n f(y)\,\mathrm{d}y=\int_{x_0}^{z}\frac{(z-y)^{n+1}}{n+1}f(y)\,\mathrm{d}y$$

令 $$I_n(x)=\int_{x_0}^{x}(x-y)^n f(y)\,\mathrm{d}y$$

则 $$I_{n+1}(z)=(n+1)\int_{x_0}^{z}I_n(x)\,\mathrm{d}x$$

所以 $$I_n(x)=n\int_{x_0}^{x}I_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x=\cdots$$

$$=n!\underbrace{\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x\cdots\int_{x_0}^{x}}_{n+1\text{次}}f(x)\,\mathrm{d}x$$

八九级高等数学竞赛试题

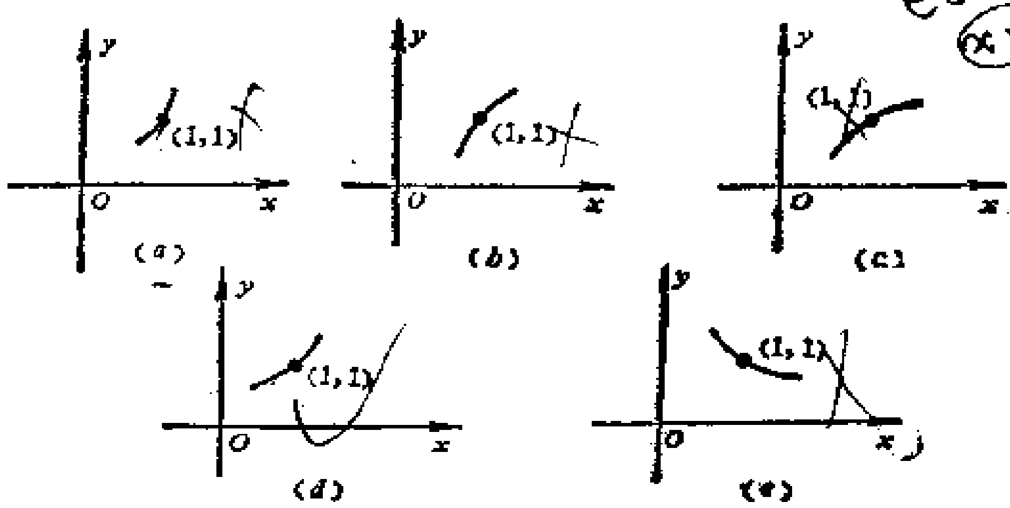
（北京理工大学）

$e^{-x}>0$

每题10分

一、下面五个图，哪个能较好地表示 $y=e^{-x}+x-\frac{1}{e}$ 在点(1,1)附近的图形，原因何在？

$\frac{1}{e^{x}}$ $(x>1)$



二、设 $f(u)$ 连续，证明

$$\int_{\frac{1}{a}}^{a}\left(1-\frac{1}{x^{2}}\right)f\left(x+\frac{1}{x}\right)dx=0 \qquad (a\neq 0)$$

三、设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，在 $(0,\pi)$ 内可导，证明至少存在一点 $\xi\in(0,\pi)$，使得

$$f'(\xi)=-f(\xi)\mathrm{ctg}\xi$$

四、求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\sqrt{n^2-1}}+\frac{1}{2+\sqrt{n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{(n-1)+\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right)$$

五、求由下列曲面围成的均匀物体的重心c(体密度μ为常数)

$x^2+y^2+z^2\geqslant 1,\quad x^2+y^2+z^2\leqslant 16,\quad z\geqslant\sqrt{x^2+y^2}$

六、设$u(x,y)$具有二阶连续偏导数($u\neq 0$)，证明：$u(x,y)=f(x)g(y)$的充分必要条件是

$$u\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}$$

七、证明

$$\lim_{\varepsilon\to+\infty}\oint_L\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{(x^2+xy+y^2)^2}=0$$

其中L为圆周$x^2+y^2=\varepsilon^2$的正向。

八、计算

$$\int\frac{1+x\cos x}{x(1+xe^{\sin x})}\mathrm{d}x.$$

九、设曲线$y=x(t-x)$ $(t>0)$与x轴的两个交点分别为原点和A，又曲线在A点的切线交y轴于B点，AB是由A至B的直线段，求t的值使得下述曲线积分的值为最小

$$I(t)=\int_{AB}\left(\frac{\sin y}{x+1}-y+1\right)\mathrm{d}x+(x+1+\cos y\ln(x+1))\mathrm{d}y$$

十、设$u=u(x,y)$在有界闭域D上连续，在D内有偏导

数，且满足$\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=u$，又在$D$的边界上$u=0$.

（1） 求出一个满足这些条件的u；

（2） 这样的u是否唯一？并证明你的结论。

提 示 与 答 案

一、由导数研究函数的性态知D较好。

二、利用定积分分区间积分的性质及变量代替即可证明。

三、构造函数$F(x)=f(x)\sin x$。 为何构造函数由定理即可得

四、计算定积分得$\dfrac{\pi}{4}$。

五、$c\left(0,0,\dfrac{85}{112}(2+\sqrt{2})\right)$

六、必要性易证，充分性证明：令$\dfrac{\partial u}{\partial y}=v$，则得

$u\dfrac{\partial v}{\partial x}=v\dfrac{\partial u}{\partial x}$或$\dfrac{u\dfrac{\partial v}{\partial x}-v\dfrac{\partial u}{\partial x}}{u^2}=0\ (u\neq 0)$，即有$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{v}{u}\right)=0$亦即

$\dfrac{v}{u}=\varphi(y)$而$\dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial y}}{u}=\varphi(g)$或$\dfrac{\partial}{\partial g}(\ln u)=\varphi(y)$，$\ln u=\int\varphi(y)$

$\times \mathrm{d}y+\psi(x)$，便得

$$u=e^{\int\varphi(y)\mathrm{d}y}\,e^{\psi(x)}=f(x)\cdot g(y)$$

七、化圆周为参数方程，注意到$\left(1+\dfrac{1}{2}\sin 2t\right)^2\geqslant\left(1-\right.$

$\left.\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，于是$|I(\varepsilon)|\leqslant\frac{8\pi}{\varepsilon^2}$。

八、$\ln\left|\frac{xe^{\sin x}}{1+xe^{\sin x}}\right|+c$

九、$t=\frac{1}{3}$

十、利用反证法可证得唯一满足条件的$u\equiv 0$。

九〇级高等数学竞赛试题

（北京理工大学）

一、设 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$。

二、设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上三次可微，$f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$。证明至少存在一点 $\xi\in(-1,1)$，使得 $f'''(\xi)\geqslant 3$。

三、设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上二次可微，且 $f''(x)<0$，证明

$$\frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a}\geqslant\frac{f(b)+f(a)}{2}$$

四、求 $\int\frac{e^{\sin 2x}\cdot\sin^2 x}{e^{2x}}\mathrm{d}x$。

五、计算 $\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}\mathrm{d}x$。

六、证明：由方程组 $\begin{cases}z=ux+y\varphi(u)+\psi(u)\\0=x+y\varphi'(u)+\psi'(u)\end{cases}$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 满足方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0$。其中 $z=z(x,y)$ 存在二阶连续偏导数。

七、证明函数 $f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2$ 在约束条件

$g(x,y)=1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$下有最大值和最小值，且它们是方程$k^2-(Aa^2+Cb^2)k+(AC-B^2)a^2b^2=0$的根。

八、计算三重积分 $\iiint\limits_V (x+y+z)^2\mathrm{d}V$。其中$V$：$x^2+y^2+z^2\leqslant 4(x-2)^2+y^2+z^2\leqslant 4$。

九、设$f(x,y)$及它的二阶偏导数在全平面连续，且$f(0,0)=0$，$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\leqslant 2|x-y|$，$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\leqslant 2|x-y|$。证明：$|f(5,4)|\leqslant 1$。

提示与答案

一、$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$

二、利用$f(x)$的马克洛林公式得$f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)=6$，$\xi_1$，$\xi_2\in(-1,1)$。

三、对函数$F(x)=(x-a)\frac{f(x)+f(a)}{2}-\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ $(a\leqslant x\leqslant b)$应用 Lagrange 定理，或由$f''(x)<0$，$f(x)$凸性研究之。

四、$-\frac{1}{4}e^{\sin 2x-2x}+c$

五、1

六、利用二阶混合偏导数与求导次序无关的性质可证。

七、因$f(x,y)$在全平面连续，$1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$是有界闭

集，若$f(x,y)$在此约束条件下，必有最大值和最小值。设(x_1,y_1)，(x_2,y_2)为最大值点和最小值点。

令 $L(x,y,\lambda)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+\lambda\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)$，则$(x_1,y_1)$，$(x_1,y_2)$应满足方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=2\left[\left(A-\frac{\lambda}{a^2}\right)x+By\right]=0 & (1)\\ \frac{\partial L}{\partial y}=2\left[Bx+\left(c-\frac{\lambda}{b^2}\right)y\right]=0 & (2)\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 & (3)\end{cases}$$

记相应的乘子为λ_1、λ_2，则$(x_1,\ y_1,\ \lambda_1)$满足

$$\begin{cases}\left(A-\frac{\lambda_1}{a_2}\right)x_1+By_1=0\\ Bx_1+\left(C-\frac{\lambda_1}{b_2}\right)y_1=0\end{cases}$$

解得$\lambda_1=Ax_1^2+2Bx_1y_1+Cy_1^2$。同理可得$\lambda_2=Ax_2^2+2Bx_2y_2+Cy_2^2$，即$\lambda_1$、$\lambda_2$是$f(x,y)$在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的最大值和最小值。又由方程组(1)、(2)有非零解，得$\left(A-\frac{\lambda}{a^2}\right)\left(C-\frac{\lambda}{b^2}\right)-B^2=0$，$\lambda_1$、$\lambda_2$是此方程的根，即$\lambda_1$、$\lambda_2$是方程$\lambda^2-(Aa^2+Cb^2)\lambda+(AC-B^2)a^2b^2=0$的根。

八、利用球坐标系并注意对称性得积分为$\frac{112}{15}\pi$。

九、满足条件$x=y$的任何点(x,y)都有$\frac{\partial f}{\partial x}=0,\frac{\partial f}{\partial y}=0$

$$f(4,4)=\int_{(0,0)}^{(4,4)}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y\right)+f(0,0)=0$$

$$|f(5,4)|=\left|\int_4^5\frac{\partial f(x,4)}{\partial x}\mathrm{d}x+f(4,4)\right|$$

$$\leqslant\int_4^5\left|\frac{\partial f(x,4)}{\partial x}\right|\mathrm{d}x\leqslant\int_4^5 2(x-4)\,\mathrm{d}x=1$$

八八级高等数学竞赛试题

（华东工学院）

一、（8 分）求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}\cdot\dfrac{\ln(x+e^x)}{x}\right]$。

二、（1）（6 分）若曲线 $y=\cos x\left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ 与 x 轴、y 轴所围图形面积被曲线 $y=a\sin x$，$y=b\sin x\,(a>b>0)$ 三等分，确定 a、b 的值。

（2）（6 分）设 $f(u)$ 为连续函数，C 为 xoy 平面上逐段光滑的闭曲线，证明：$\oint\limits_C f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)=0$。

三、（10分）已知 $z=f[\phi(x)-y,xh(y)]$，其中 f 具有二阶连续偏导数，ϕ,h 均为二阶可微函数，计算 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$。

四、（10分）设 $I_m=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^m x\,\mathrm{d}x$（$m>1$ 的自然数）

（1）计算 $I_{m+2}+I_m$。

（2）证明 $\dfrac{1}{2(m+1)}<I_m<\dfrac{1}{2(m-1)}$。

五、(10分)将直角坐标系下的二重积分$\iint\limits_D f(xy)\,dx\,dy$

(其中D为直线$y=a(a>0)$，$x=-a$，$x=a$及$y=0$所围平面区域)化为极坐标系下的累次积分。

六、(10分)已知A球半径为$a(a>0)$，另有一个B球与A球相割，若B球的球心在A球的球面上，问B球的半径为多大时，夹在A球内部的B球表面积为最大，并求最大表面积的值。

七、(10分)求级数$\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^6}{5\cdot 6}+\cdots$

$+\frac{x^{2n}}{(2n-1)(2n)}+\cdots$的收敛域与和函数。

八、(10分)证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{1}{12}(3x^2-6\pi x+2\pi^2)$，

$0\leqslant x\leqslant\pi$。

九、(10分)点A沿一直线由南向北作匀速运动，而点B沿一曲线追赶A。在开始时刻，B在A的正东距A两个单位，在追赶过程中B点的运动方向始终朝向A。又知B点的速率与A点速率之比为$\lambda(\lambda>1)$，选择适当坐标系，求出B点的运动轨迹方程及在何处追上A。

十、(10分)设$f(x)$在(a,b)内有二阶导数，且$f''(x)>0$。证明：(1)对于$a<x<x_0<y<b$，存在$\lambda(0<\lambda<1)$，使$x_0=\lambda x+(1-\lambda)y$；

(2)对于满足$0<\lambda<1$的λ有

$$f[\lambda x+(1-\lambda)y]\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

提示与答案

一、$-\frac{1}{12}$

二、（1）$a=\frac{4}{3}$，$b=\frac{5}{12}$　　（2）略

三、$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\phi'(x)+[xh'(y)\phi'(x)-h(y)]$

$$\times\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+xh(y)h'(y)\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+h'(y)\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-2xh'(y)\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}$$

$$+[xh'(y)]^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+xh''(y)\frac{\partial f}{\partial v}$$

其中　$u=\phi(x)-y$，$v=xh(y)$。

四、（1）$\frac{1}{m+1}$　　（2）用反证法。

五、略

六、B球半径 r，$r=\frac{4}{3}a$ 时表面积$S=\frac{32}{27}\pi a^2$ 为最大。

七、收敛域为$[-1,1]$，和函数$S(x)=\frac{1}{2}\left[\ln x\ln\frac{1+x}{1-x}\right.$ $\left.+\ln(1-x^2)\right](|x|<1)$，$S(\pm1)=\ln2$。

八、将$f(x)=3x^2-6\pi x$在$[0,\pi]$上展为余弦级数。

九、选择坐标系为：当$t=0$时，A点位置为坐标原点，B点在x轴上。设B点速度为v，得方程

$\frac{xx''}{ax'^2}=\frac{1}{v}\sqrt{1+x'^2}$，$x|_{y=0}=2$，$x'|_{y=0}=\infty$，解为

$$y=\frac{\lambda}{\lambda+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{1+\frac{1}{\lambda}}-\frac{\lambda}{\lambda-1}\left(\frac{x}{2}\right)^{1-\frac{1}{\lambda}}+\frac{2\lambda}{\lambda^2-1}$$

十、（1）$\lambda=\frac{y-x_0}{y-x}$

（2）利用$f(x)$在点$\lambda x+(1-\lambda)y$处的一阶Taylor公式。

八九级高等数学竞赛试题

（华东工学院）

一、(12分)设$0<a<b$，求极限

$$\lim_{t\to 0}\left(\int_0^1 [bx+a(1-x)]^t\,dx\right)^{\frac{1}{t}}$$

二、(12分)设a为实数，问方程$e^x=ax^2$有几个实根？

三、(12分)求级数$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{(-1)^n}{3n+1}+\cdots$的和。

四、(12分)设$f''(x)$在$[0,1]$上存在，且在$[0,1]$内$|f''(x)|\leqslant 1$，证明：当用$f\left(\frac{1}{2}\right)$去近似代替$f(x)$在$[0,1]$上的平均值，其误差小于0.05。

五、(12分)有函数$f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx$，($n$为正整数，$a_1$，$a_2,\cdots,a_n$为实数)，如果对一切$x$，有$|f(x)|\leqslant|\sin x|$，证明：对一切$x$，有$|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leqslant 1$。

六、(12分)计算积分$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^{\sqrt{2}})}dx$的值。

七、(14分)设$f(x)$为n次多项式，且$f(x)$有n个互不相同的零点：$x_1,x_2,\cdots,x_n$。记m_i为曲线$y=f(x)$在点$(x_i,f(x_i))$的法线的斜率$(i=1,2,\cdots,n)$，证明

$$m_1+m_2+\cdots+m_n=0$$

八、(14分) 设$a(x)$，$b(x)$在区间$[-1,1]$上连续，问函数$y=x^2\sin x$是否可能是微分方程$y''+a(x)y'+b(x)y=0$在$[-1,1]$上的解？

提示与答案

一、$e^{-1}\cdot\left(\dfrac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}$

二、若$a\leqslant 0$时方程无实根；

若$a>0$时则$a<\dfrac{e^2}{4}$方程仍无实根，$a=\dfrac{e^2}{4}$仅有一个实根，

$a>\dfrac{e^2}{4}$有两个实根。

三、$\dfrac{1}{3}\ln 2+\dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi$

四、利用$f(x)$在$x=\dfrac{1}{2}$处的Taylor公式，用$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$替代平均值时误差为$\dfrac{1}{1-0}\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx-f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\int_0^1\left[f(x)-f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right]dx=\int_0^1\left[f'\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{2!}f''(\xi)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2\right]dx$

(其中ξ在x与$\dfrac{1}{2}$之间)，故$\left|\displaystyle\int_0^1\left[f'(x)-f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right]dx\right|\leqslant\dfrac{1}{2!}\cdot\displaystyle\int_0^1\left|f''(\xi)\right|\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2dx\leqslant\dfrac{1}{2}\int_0^1\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2dx=\dfrac{1}{24}<0.05$。

五、注意 $|f'(0)| = \lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|$

$$= \lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{\sin x}\right|\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leqslant 1.$$

六、利用倒置换积分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)(1+x^{\sqrt{2}})}\mathrm{d}x =$ $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x^{\sqrt{2}}}{(1+x^2)(1+x^{\sqrt{2}})}\mathrm{d}x$，故 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^{\sqrt{2}})}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$

七、由于 $f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$，$f'(x_k)$ $= \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(x_k - x_j)$，$(k=1,2,\cdots,n)$ 故

$$-\sum_{k=1}^{n} m_k = \frac{1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)} + \frac{1}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)} + \cdots + \frac{1}{(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}$$

由于

$$\frac{1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)} = \frac{1}{(x_1-x_2)[(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)]} + \frac{1}{(x_1-x_3)[(x_3-x_2)\cdots(x_3-x_n)]} + \cdots + \frac{1}{(x_1-x_n)[(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})]}$$

所以 $-\sum\limits_{k=1}^{n} m_k = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{f'(x_k)} = 0$。

八、不可能。用反证法证明。

1988年数学竞赛试题

（北京信息工程学院）

一、（15分）

1. 设 $F(x)=x/(x-1)$，求 $F\{F[F(F(x))]\}$。

2. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})$

$$(|x|<1)。$$

3. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x^2}}{\sin x}+\left(\dfrac{3-e^x}{2+x}\right)^{\csc x}\right]$。

二、（15分）

1. 设 $f'(\ln x)=\begin{cases}1, & 0<x\leqslant 1\\ x, & x>1,\end{cases}$

且 $f(0)=0$，求 $f(x)$。

2. 若 $0<a<1$，则对于 $x>0$ 有

$$x^a-ax\leqslant 1-a$$

3. 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)>0$，证明

$$\int_0^1 f(x)\,dx\cdot\int_0^1\frac{1}{f(x)}\,dx\geqslant 1$$

三、（24分）

1. 求 $\displaystyle\int\frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}\,dx$。

2. 求 $\displaystyle\oint_C\frac{dx+dy}{|x|+|y|}$，其中 C 是以 $A(1,0)$，

$B(0,1)$，C $(-1,0)$ 及D $(0,-1)$ 为顶点的正方形围线取正向。

3. 求 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

其中 $u=f(x+y+z,\ x^2+y^2+z^2)$

四、(10分)设函数$f(u)$具有连续导数，求

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{\pi t^4}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

五、设$f(x,y)$是具有偏导数的实值函数，在 $x^2+y^2\leqslant 1$内有定义，且满足$|f(x,y)|\leqslant 1$。证明：在单位圆内存在一点$(x_0,\ y_0)$，使得以下不等式成立

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right]^2+\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right]^2\leqslant 16$$

六、(10分)已知某级数的部分和为

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\frac{5}{2^5}+\frac{8}{2^6}+\frac{13}{2^7}+\cdots$$

$$+\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}+\frac{a_n}{2^n}\qquad (a_n=a_{n-1}+a_{n-2})$$

(1)求证此级数收敛；(2)求出级数的和。

七、(10分)如果$0<p\leqslant a\leqslant x\leqslant b\leqslant q$，则有

$$f(x)=\left(\sqrt{\frac{x}{a}}-\sqrt{\frac{a}{x}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{b}{x}}-\sqrt{\frac{x}{b}}\right)^2$$

$$\leqslant\left(\sqrt{\frac{q}{p}}-\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^2$$

当且仅当$a=p$，$b=q$，$x'=p$或q时等号成立。

八、(10分)设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性无关，证明：当且仅当$n$为奇数时，向量组

$$\alpha_1+\alpha_2, \quad \alpha_2+\alpha_3, \cdots, \alpha_{n-1}+\alpha_n, \alpha_n+\alpha_1$$

也线性无关。

提示与答案

一、1. X；2. $\dfrac{1}{1+x}$；3. -1

二、1. $f(x)=\begin{cases} x & -\infty<x\leqslant 0 \\ e^{x-1} & x>0 \end{cases}$

2. 解：令$f(x)=x^a-ax$，$f'(x)=a(x^{a-1}-1)$
当$0<x<1$时，$f'(x)>0$；当$x>1$时，$f'(x)<0$。
函数$f(x)$在$x=1$处取最大值$1-a$，即有

$$x^a-ax\leqslant 1-a$$

3. 利用Cauchy不等式，即

$$\int_0^1 f(x)\,dx\cdot\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}\geqslant\left[\int_0^1\sqrt{f(x)}\,\frac{1}{\sqrt{f(x)}}dx\right]=1$$

三、

1. $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right|+c$ 2. 0

3. $\Delta u=3f''_{11}+4(x+y+z)f''_{12}+4(x^2+y^2+z^2)f''_{22}$
$+6f'_2$

四、$f'(0)$

五、[证明]　考察$g(x,y)=f(x,y)+2(x^2+y^2)$，易知$g(0,0)\leqslant 1$，又在$x^2+y^2=1$上，$g(x,y)\geqslant 1$．故$g(x,y)$外可在内点(x_0,y_0)处达到最小值，我们有：

$$0=\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+4x_0$$

$$0=\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)+4y_0$$

从而得

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right]^2+\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right]^2\leqslant 16$$

六、

（1）　略　　　　（2）　$S=2$

七、[证]　$f(x)$中平方式展开得

$$f(x)=\frac{x}{a}+\frac{a}{x}+\frac{b}{x}+\frac{x}{b}-4$$

设　　　　$a\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant b$

$$\Delta f(x)=(a+b)(x_2-x_1)\left(\frac{1}{ab}-\frac{1}{x_1x_2}\right)$$

当$x_1\leqslant x_2\leqslant\sqrt{ab}$时，$\Delta f(x)\leqslant 0$；当$x_2\geqslant x_1\geqslant\sqrt{ab}$时，$\Delta f(x)\geqslant 0$。所以，$f(x)$的最大值为$f(a)$或$f(b)$，且

$$f(a)=f(b)=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-2=\left(\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2$$

从而得 $$f(x)\leqslant\left(\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2\leqslant\left(\sqrt{\frac{q}{p}}-\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^2$$

当且仅当 $a=p$，$b=q$，$x=p$或q时，等号成立。

八、略。

1989年数学竞赛试题

（北京信息工程学院）

一、（20分）

1. 作函数$y=\lim\limits_{n\to\infty}(x-1)\operatorname{arctg}x^n$的图象。

2. 求函数$y=x^2\cos 2x$在$x=0$处的十阶导数值。

3. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{3/2}}\displaystyle\int_0^x\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$

4. 求由柱面$x^2+y^2=a^2$与$y^2+z^2=a^2$所围成的立体的表面积。

二、（10分）证明积分$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^{\alpha})}$与$\alpha$无关。

三、（10分）计算积分

$$I=\oint_L\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

1. L依正向在圆周$(x-1)^2+(y-1)^2=1$上进行。

2. L依正向在圆周$x^2+y^2=1$上进行。

四、（10分）证明：若$a_n>0(n=1,2\cdots)$且$\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}/a_n$存在，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}/a_n$$

五、（10分）展开

$$1/(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$$

为幂级数。

六、(15分) 试证当 $x>10^{302}$ 时

$$0.01x>(\ln x)^{100}$$

七、(10分) 解方程

$$y''-xy'-y=0$$

八、(15分)设 $f'(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，且 $f(a)=f(b)=0$，求证

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}\max|f'(x)|$$

提示与答案

一、1.(图象略)。提示：注意$|x|\leqslant1$与$|x|>1$分别加以讨论。

2. $2^9\times45$； 3. 0； 4. $16a^2$。

二、提示：令 $x=\frac{1}{t}$，$I=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^a)}$

$$=\int_{\infty}^{0}\frac{-\mathrm{d}t}{(1+t^2)\left(1+\frac{1}{t^a}\right)}$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{t^a\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^a)}=\frac{\pi}{2}-I\text{，故}I=\frac{\pi}{4}\text{。}$$

三、1. 0； 2. 2π。

四、提示：$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_2}{a_1}}\cdot\sqrt[n]{a_1}$

利用结论：若$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A > 0$，则极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_1\cdots b_n}$存在且也为$A$。

五、提示：乘以$\dfrac{1-x}{1-x}$。

六、提示：考虑函数$f(x)=0.01x/(\ln x)^{100}$，可证当$x>e^{100}$时，$f'(x)>0$即$f(x)$单调上升，故当$x>10^{302}>e^{100}$时，

$$f(x)>f(10^{302})=\left(\frac{1000}{302\ln 10}\right)^{100}>1$$

七、提示：$y''=(xy)'$。解为$y=e^{\frac{x^2}{2}}\left(c_2+\int e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)$。

八、提示：利用$f(x)=\int_a^x f'(x)dx$，$f(x)=\int_b^x f'(x)dx$。

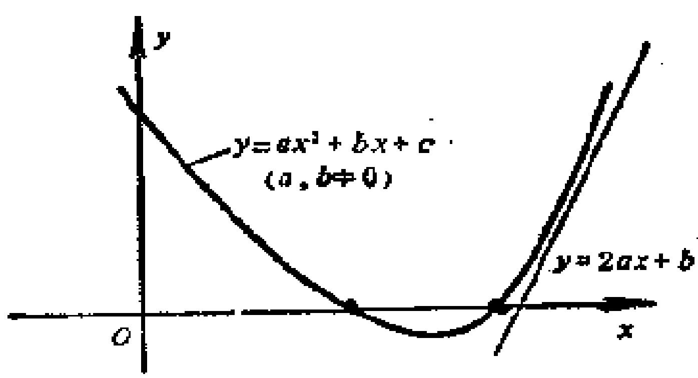
高等数学竞赛试题　1989.6

(上海交通大学)

一、(12分)设n为正整数，试求

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$$

二、(12分)试说明：为什么图中所画的曲线是不可能的。



三、(14分)设$0<x_i<\pi\ (i=1,2,\cdots,n)$且令

$$x=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},$$

证明：$\left(\frac{\sin x_1}{x_1}\right)\left(\frac{\sin x_2}{x_2}\right)\cdots\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)\leqslant\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n$

四、(14分)设 $f(x)$ 在[0,1]上可微，且

$$f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}e^{1-x^2}f(x)\,dx$$

证明：在 $(0,1)$ 内至少存在 ξ，使 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$。

五、(12分)已知 $y'(x)=\operatorname{arctg}(x-1)^2$ 及 $y(0)=0$，试计算

$$I=\int_0^1 y(x)\,dx$$

六、(12分)计算 $3^{\frac{1}{3}}9^{\frac{1}{9}}27^{\frac{1}{27}}81^{\frac{1}{81}}\cdots$

七、(12分)试证：可微函数 $z=f(x,y)$ 是 $ax+by\ (ab\neq 0)$ 的函数的充要条件为 $b\dfrac{\partial z}{\partial x}=a\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

八、(12分)求级数

$$\cos^3x-\frac{1}{3}\cos^3 3x+\frac{1}{3^2}\cos^3 3^2x-\frac{1}{3^3}\cos^3 3^3x+\cdots$$ 的和函数。

八八级数学竞赛试题 1990.3

（清华大学）

一、已知n为正整数，试证明当n充分大时下列不等式成立

$$0<\int_0^1 \pi\left[\sqrt{3}\,x(1-x)\right]^n \sin \pi x\,\mathrm{d}x<1$$

二、研究$\int_0^{+\infty}\frac{x^\lambda}{e^x-1}\mathrm{d}x$（$\lambda$为实数）的收敛性。

三、设$f(x)$在$0\leqslant x\leqslant 1$上的导函数连续，$f(0)=0$，且满足不等式$0\leqslant f'(x)\leqslant 2f(x)$，试证明$f(x)\equiv 0$。

四、A为$m\times p$矩阵，B为$p\times n$矩阵。

（1）若A的秩$r(A)=p$，试证明 $r(AB)=r(B)$。

以下结论是否正确，讲出理由来。

（2）若$r(A)=m$，则$r(AB)=r(B)$。

（3）若$r(B)=p$，则$r(AB)=r(A)$。

（4）若$r(B)=n$，则$r(AB)=r(A)$。

五、设p_n、q_n满足关系式

$$\begin{cases}p_n=2p_{n-1}+q_{n-1}\\ q_n=-2p_{n-1}+5q_{n-1}\end{cases}$$

已知$p_0=1$，$q_0=-1$，试求$p_n=?$，$q_n=?$

六、设二元实函数$F(x,y)$满足方程

$$x\frac{\partial F}{\partial y}-y\frac{\partial F}{\partial x}=\sum_{k=0}^{n}b_k x^{n-k}y^k \qquad (*)$$

其中$b_k(k=0,1,2,\cdots,n)$为实常数。试证明：

（1）当n为奇数时，方程（$*$）恒有n次齐次多项式解。

（2）当n为偶数$(n=2m)$时，方程（$*$）有n次齐次多项式解的充要条件是

$$\sum_{k=0}^{m}(2m-2k-1)!!(2k-1)!!b_{2k}=0$$

$$\left[n!!=\begin{cases}n(n-2)(n-4)\cdots\cdots6\cdot4\cdot2(n\text{是偶数时})\\n(n-2)(n-4)\cdots\cdots5\cdot3\cdot1(n\text{是奇数时})\end{cases}\right]$$

高等数学竞赛试题　　1989.11

（西安交通大学）

一、简答下列各题（每题 8 分，共64分）

1．　当$x\to 0$时确定下列无穷小量的阶数：

（1）$\lg(\sqrt{x+2}-\sqrt{2})$　　　（2）$\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1$

（3）$3^{\sqrt{x}}-1$

2．　设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$是任意三个矢量，证明$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$必共面，并说明这一事实的几何意义。

3．　求函数$f(x)=\dfrac{x^4-2x^3+3x-1}{x(x-1)^2}$的二阶导数。

4．　计算不定积分$\displaystyle\int\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x\cos x}\mathrm{d}x$。

5．　研究函数$y=x[x]$的可导性．如有不可导点，要讨论左、右导数是否存在。

6．　证明若$u=\ln(x^3+y^3+y^3-3xyz)$，则$\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{3}{x+y+z}$。

7．　计算定积分$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x|\sin x\cos x|}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x$。

8. 求均匀的半球体的重心。

二、(12分)设 $f(x,y)$ 在包含原点的某开圆 G 内可微，且 $f(0,0)=0$，证明

$$f(x,y)=x\int_0^1\frac{\partial f(tx,ty)}{\partial x}dt+y\int_0^1\frac{\partial f(tx,ty)}{\partial y}dt.$$

三、(12分)设 $f(x)$ 在[0,1]上连续，$\int_0^1 f(x)dx=0$，$\int_0^1 xf(x)dx=1$，试考虑积分 $\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)dx$，证明

(1)存在 $\xi\in[0,1]$，使 $|f(\xi)|>4$。

(2)存在 $\xi\in[0,1]$，使 $|f(\xi)|=4$。

四、(12分)计算线积分

$$\int_C\frac{y^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx+[ax+2y\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})]dy$$

C 是沿圆周 $x^2+y^2=R^2$ 由点(0, R)依逆时针方向到点(0, $-R$)的半圆($a>0,R>0$)。

陕西省高等工科院校第二次数学竞赛试题　1990.1

1. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x t^2 e^{t^2}dt}{xe^{x^2}}$。

2. 设$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3, \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\{1,1,1\}$，试求$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角。

3. 求$\int_1^3 dx\int_{x-1}^2 e^{y^2}dy$。

4. 试求c值，使$\int_a^b(x+c)\cos(x+c)dx=0$，其中$b>a$。

5. $f(u)$在$(0,+\infty)$可微，$\Omega: x^2+y^2+z^2\leqslant t^2$，试求

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{\Omega}f(x^2+y^2+z^2)d\Omega$$

6. $f(x)$在a处可微且$f(a)\neq0$，试求

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n.$$

7. 设$f(t)$可微且$f\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{x}$，求$x^2z_x'+y^2z_y$。

8. 求$\int_2^4\dfrac{xdx}{\sqrt{|x^2-9|}}$。

9. 曲面S：$z=1-x^2+y^2\ (z\geqslant 0)$在其上分布有密度函数为 $\rho=x^2+y^2$的质量，求S的质量。

10. 在$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$的第一挂限部分求一点的坐标，使该点处的切平面与三个坐标面所围成的四体体积最小。

11. 设$f(u)$在$(-\infty,+\infty)$上有连续导数，试证

$$\int_c \frac{1+y^2f^2(xy)}{y^2}\,\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\,\mathrm{d}y$$

与路径c无关，c是在$y>0$内之分段光滑曲线，并计算此积分当c从$\left(3,\dfrac{2}{3}\right)$到$(1,2)$的值。

12. 设u在l：$\rho=1+\cos\theta$所围闭域D上连续，且二阶导数连续，又$u_{xx}+u_{yy}=1$，试证$\displaystyle\int_l \frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}s=|D|$，其中$\dfrac{\partial u}{\partial n}$是$u$沿$D$的边界外向法线方向导数，$l$方向为逆时针方向，求此曲线积分的值。

13. $u(x,y)$在某凸多边形内连续，且处处可导，又u在其形心G之值大于u在多边形边界之值。试证明在多边形内必有一点P，使在该点处 $u_x^2+u_y^2=0$。

提示与答案

1. $\dfrac{1}{2}$

2. $\mathrm{tg}\,\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}},\theta=\dfrac{\pi}{6}$.

3. $\frac{1}{2}(e^4-1)$

4. $y=(x+c)\cos(x+c)$ 以 $x+c=0$ 为奇对称，取

$$c=-\frac{a+b}{2}.$$

则积分可简化为

$$\int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} u\sin u\,\mathrm{d}u=0.$$

5. 取球坐标系，积分得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}\Omega=4\pi f(t^2)t^2.$$

6. 注意极限

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left|f\left(a+\frac{1}{n}\right)\right|-\ln|f(a)|}{\frac{1}{n}}$$

$$=[\ln|f(x)|]'|_{x=a}=\frac{f'(a)}{f(a)}.$$

故得 $$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}.$$

7. z^2

8. 3是瑕点。$\sqrt{5}+\sqrt{7}$

9. $\frac{\pi}{60}(15\sqrt{5}+1)$

10. 体积函数 $V=\frac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0}$。使 V 取最小的点为

$$\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right).$$

11. 证明偏导数相等，曲线积分值为 -4。

12. 利用线积分、格林公式可证。值为 $\frac{3}{2}\pi$。

13. 由条件知 u 取最值点必在凸多边形内部。取极大值之点即为最值点，故此点有

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=0.$$

第一届北京市大学生（非理科）数学竞赛试题　1988.9.18

一、求由曲面 $z=x^2+y^2$ 和 $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的体积和表面积。（12分）

二、解微分方程

$y(y+1)dx+[x(y+1)+x^2y^2]dy=0$　　（12分）

三、设 $x_1=2$，$x_2=2+\frac{1}{x_1}$，$\cdots x_{n+1}=2+\frac{1}{x_n}\cdots\cdots$ 求证：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其值。（12分）

四、求

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}\quad(a_i>0, i=1,2,\cdots,n)$$

（12分）

五、讨论级数

$$1-\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^x}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{(2^n)^x}+\cdots$$

在哪些 x 处收敛？在哪些 x 处发散？（12分）

六、设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $f[f(x)]=x$。证明在 $(-\infty,\infty)$ 内至少有一个 x_0 满足 $x_0=f(x_0)$。（15分）

七、求半径为 R 的圆的内接三角形中面积最大者（需要论证）。（15分）

八、设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内有二阶导数，且 $f(a+1)=0$，$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$。求证在 $(a,+\infty)$ 内至少有一点 ξ 满足 $f''(\xi)=0$。（15分）

九、求

$$\lim_{\substack{m\to+\infty\\ n\to+\infty}}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{i+j}}{i+j}\qquad\text{（15分）}$$

提示与答案

一、$V=\frac{11}{6}\pi$

$$S=\left[\frac{1}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)+\sqrt{2}\right]\pi$$

二、该方程化为

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}+\frac{y}{y+1}x^2\text{ 贝努利方程}$$

$$\frac{d\frac{1}{x}}{dy}=-\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{x}-\frac{y}{y+1}$$

通解为

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{y}\left[c-\frac{1}{2}y^2+y-\ln(y+1)\right]$$

或 $$y=x\left[c-\frac{1}{2}y^2+y-\ln(y+1)\right]$$

三、$\{x_n\}$ 非单调数列，$x_n>0(n=1,2\cdots\cdots)$，但

$$x_{2n+1}-x_{2n-1}=\frac{1}{x_{2n}\cdot x_{2n-1}x_{2n-2}\cdot x_{2n-3}}(x_{2n-1}-x_{2n-3})\qquad(1)$$

上式表明，对子列$\{x_{2n+1}\}$，有

$$x_{2n+1}-x_{2n-1}=\frac{1}{x_{2n}\cdot x_{2n-1}\cdots x_3\cdot x_2\cdot x_1}(x_3-x_1)>0$$

故$\{x_{2n+1}\}$是一单调上升数列，且有上界$2+\frac{1}{2}$。

同理，由(1)可知$\{x_{2n}\}$单调下降且有下界2。

故二子列，均有极限，设为α,β，且满足

$$\alpha=2+\frac{1}{2},\ \beta=2+\frac{1}{\beta},\ \alpha=\beta=\sqrt{2}+1$$

四、原式$=\exp\left(\ln\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}\right)=\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}$

五、(1)当$x=1$时，交错调和级数，收敛

(2)$x>1$，部分和

$$S_{2n}=1-\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^x}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{(2^n)^x}$$

$$=1-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^x}\right)+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4^x}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^n}+\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{(2^n)^x}\right)$$

因为$x>1$，$(2k)^{x-1}$发散，$(+\infty)$存在正数k_x，

当$k>k_x$时，$\frac{(2k)^{x-1}}{2}>1$，于是

$$\frac{1}{2k}-\frac{1}{(2k)^x}=\frac{(2k)^{x-1}-1}{(2k)^x}>\frac{(2k)^{x-1}}{2(2k)^x}=\frac{1}{4k}$$

即：$$c=\sum_{k=1}^{k_x}\left\{\frac{1}{2k}-\frac{1}{(2k)^x}\right\}-\frac{1}{4}\left\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2k_x}\right\}$$

当$n>k_x$时，有

$$S_{2n} > \left\{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2^n}\right\} + c + \frac{1}{4}\left\{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right\},$$

因为$\left\{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right\} \to +\infty$（当$n\to\infty$时）

又$\left(1 - \frac{1}{2} + \cdots - \frac{1}{2n}\right) + c$ 收敛，故S_{2n}发散。

$x<1$，$(2n)^{x-1}\to 0$，当$n>n_x$时，有$(2n)^{x-1}<\frac{1}{2}$，即

$$\frac{(2n)^{x-1}-1}{(2n)^x} < -\frac{1}{2(2n)^x}$$

用归纳法可证，当$n>n_x$时

$$S_{2n} < \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2n}\right] + c_1 - \frac{1}{2^x}\left[1 + \frac{1}{2^x} + \cdots + \frac{1}{n^x}\right]$$

因为$\left[1 - \frac{1}{2} + \cdots - \frac{1}{2n}\right] + c_1$收敛，又

$-\frac{1}{2x}\left[1 + \cdots + \frac{1}{nx}\right]$发散于$-\infty$，$S_{2n}\to-\infty$

所以，所给级数，当$x=1$时收敛，$x\neq 1$时发散。

六、反证、$f(x)\neq x$，由连续性知

$$f(x)>x\text{或}f(x)<x$$

$$f[f(x)]>f(x)\text{或}f[(f)]<f(x)$$

$x>f(x)$或$x<f(x)$，矛盾于$f(x)>x$或$f(x)>x$。故$f(x)\neq x$不成立，即：将存在点x_0，使$f(x_0)=x_0$。

七、可由条件极值证明，略。

圆内接三角形为等边三角形时，面积最大，

$$S = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot R^2\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$$

八、由于$\lim\limits_{x\to a+} f(x)=0$，若在$(a, a+1)$内$f(x)=0$，显

然 $f'(x)$在$(a,a+1)$至少有一零点，若在$(a,a+1)$内有$f(x_0)\neq 0$，不妨设$f(x_0)=l>0$，则由$f(x)$的连续性，可取δ充分小，使$f(x)$在$[a+\delta,\ a+1]$内有如下性质：

i) $f(x)$二阶可微；

ii) $f(a+\delta)<l=f(x_0)$。

从而$f(x)$可在$[a+\delta,a+1]$内达到极大值M，$f(x_1)=M$，同理存在

$x_2\in[a+1,\ +\infty]$使$f'(x_2)=0$，由微分中值定理

$$f'(x_1)=f'(x_2)=0$$

存在$\xi\in(x_1,x_2)$，使$f'(\xi)=0$。

九、令$S_{m,n}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}/(i+j)$

$$=\int_0^1\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}x^{i+j-1}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 x\left[\sum_{i=1}^{m-1}(-x)^i\right]\left[\sum_{j=0}^{n-1}(-x)^j\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 x\frac{1-(-x)^m}{1+x}\cdot\frac{1-(-x)^n}{1+x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}[x+(-1)^{m+1}x^{m+1}+(-1)^{n+1}$$

$$\times x^{n+1}+(-1)^{m+n}x^{m+n+1}]\mathrm{d}x$$

而$\int_0^1\frac{x^K}{(1+x)^2}\mathrm{d}x<\int_0^1 x^K\mathrm{d}x=\frac{1}{K+1}$，$\lim_{K\to\infty}\int_0^1\frac{x^K\mathrm{d}x}{(1+x)^2}=0$

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}S_{m,n}=\int_0^1\frac{x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\ln 2-\frac{1}{2}$$

第二届北京市大学生（非理科）数学竞赛试题1990.10.21

下列各题每题10分

1. 设f是一个定义于长度为不小于2的闭区间I上的实函数，满足

$$|f(x)|\leqslant 1,\quad |f''(x)|\leqslant 1,\quad \forall x\in I$$

证明$|f'(x)|\leqslant 2$，$\forall x\in I$，且有函数使得等式成立。

2. 设函数f在$[a,b]$上连续，且对$\forall t\in[0,1]$及$\forall x_1$，$x_2\in[a,b]$满足$f(tx_1+(1-t)x_2)\leqslant tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$，证明

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

3. 计算（1）$\int e^{-\sin x}\sin 2x/\sin^4\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$

$$（2）\int_0^1\ln(1+x)/(1+x^2)\,\mathrm{d}x$$

$$（3）\int_{e^{-2n\pi}}^1\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right|\mathrm{d}x$$

4. 设f是定义于闭区间$[0,1]$上的连续函数，且$0<m\leqslant f(x)\leqslant M$，$\forall x\in[0,1]$，证明

$$\left(\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\right)\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)\leqslant(m+M)^2/4mM$$

5. 对p讨论幂级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^p\ln n}$的收敛区间。

6. 设$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^n/n^2$，$0\leqslant x\leqslant 1$

（1）证明$f(x)+f(1-x)\ln(1-x)=\pi^2/6$，$\forall x\in[0,1]$。

（2）计算$\int_0^1\frac{1}{2-x}\ln\frac{1}{x}dx$。

7. 设函数$u=f(\ln\sqrt{x^2+y^2})$满足方程$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(x^2+y^2)^{3/2}$，试求函数$f$的表达式。

8. 计算：由曲线$y=x^2$与直线$y=mx(m>0)$在第一象限内所围成的图形绕该直线旋转所产生的体积。

9. 已知曲线积分$\oint_L\frac{1}{\phi(x)+y^2}(xdy-ydx)=A$(常数)，其中$\phi(x)$是可导函数$\phi(1)=1$，$L$是绕原点(0,0)一周的任意正向闭曲线，试求出$\phi(x)$及$A$。

10. 设$y_1(x)$、$y_2(x)$及$y_3(x)$均为非齐次线性方程

$$y''+P_1(x)y'+P_2(x)y=Q(x)$$

的特解，其中$P_1(x)$，$P_2(x)$，$Q(x)$为已知函数，且

$$[y_2(x)-y_1(x)]/[y_3(x)-y_1(x)]\neq\text{常数}$$

试证明：$y(x)=(1-C_1-C_2)y_1(x)+c_1y_2(x)+c_2y_3(x)$ 为给定方程的通解。（C_1、C_2为任意常数）

提示与答案

1. （注：本书作者认为题目“……不小于……”似有不确切之处，建议指定$I=[0,2]$）

〔证〕 对$\forall x\in I$展开$f(t)$为一阶台劳公式，计算t取0、

2 时的函数值，于是有$f(2)-f(0)=2f'(x)-\frac{1}{2}x^2f''(\xi_1)+\frac{1}{2}(2-x)^2f''(\xi_2)$，$0\leqslant\xi_1\leqslant x\leqslant\xi_2\leqslant 2$，所以$2|f'(x)|\leqslant 1+1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}(2-x)^2\leqslant 4$。故$|f'(x)|\leqslant 2$，特别地当$f(x)=\frac{1}{2}x^2-1$时等号成立。

2. 令$x=ta+(1-t)b$，则$dx=(a-b)dt$，

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)\int_0^1 f\left[ta+(1-t)b\right]dt\leqslant(b-a)$$
$$\times\int_0^1[tf(a)+(1-t)f(b)]dt=(b-a)\left[\frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{2}f(b)\right]$$

又 $$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx$$
$$=-\int_b^{\frac{a+b}{2}}f(a+b-u)du+\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx$$
$$=\int_{\frac{a+b}{2}}^b[f(a+b-x)+f(x)]dx,\quad \frac{a+b}{2}\leqslant x\leqslant b$$

即 $$a\leqslant a+b-x\leqslant\frac{a+b}{2}.$$

$$\int_a^b f(x)dx\geqslant 2\int_{\frac{a+b}{2}}^b f\left[\frac{(a+b-x)+x}{2}\right]dx$$
$$=2\int_{\frac{a+b}{2}}^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

3. （1）$\frac{8e^{-\sin x}}{1-\sin x}+c$；（2）利用变换$x=\operatorname{tg}t$，并注意

到 $\sin t=\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$，得 $\frac{\pi}{8}\ln 2$，　　（3）$x>0$，积分变为

$$\int_{e^{-2n\pi}}^{1}|\sin\ln x|\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int_{-2n\pi}^{0}|\sin u|\mathrm{d}u$$

$$=2n\int_{-\pi}^{0}|\sin u|\mathrm{d}u=4n$$

4．由 $[f(x)-m][f(x)-M]/f(x)\leqslant 0$ 得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+mM\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\leqslant m+M$$

令 $\mu=mM\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x$，则

$$\mu\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\leqslant(m+M)\mu-\mu^2\leqslant\frac{1}{4}(m+M)^2$$

5．当 $p<0$ 时，收敛区间为 $(-1,\ 1)$
当 $0\leqslant p\leqslant 1$ 时，收敛区间为 $[-1,\ 1)$
当 $p>1$ 时，收敛区间为 $[-1,\ 1]$

6．（1）由 $[f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)]'=0$，知 $f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)=c$，$c=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$。

（2）变换 $2-x=t$，注意 $\ln\left(1-\frac{t}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{2^n\cdot n}$，再由（1）得结果为 $\frac{\pi^2}{12}-\frac{(\ln 2)^2}{2}$。

7．$f=\frac{1}{25}e^{5r}+C_1r+C_2$，其中 $r=\ln\sqrt{x^2+y^2}$。

8．作旋转变换，使新坐标系中 x 轴（记 ox'）与 $y=mx$ 重合，旋转角 φ，因此 $m=\mathrm{tg}\varphi$，$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$，

$\sin\varphi = \dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}}$，旋转公式

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi = \dfrac{x'}{\sqrt{1+m^2}} - \dfrac{my'}{\sqrt{1+m^2}} \\ y = y'\sin\varphi + y'\cos\varphi = \dfrac{mx'}{\sqrt{1+m^2}} + \dfrac{y'}{\sqrt{1+m^2}} \end{cases}$$

曲线 $y = x^2$ 化为 $y' = [2mx' + \sqrt{1+m^2} - \sqrt{1+m^2}$

$$\times\sqrt{4m\sqrt{1+m^2}\,x'+1}\,]/2m^2$$

$$y'^2 = \frac{x'^2}{m^2} + \frac{1+m^2}{2m^4} + \frac{(m^2+2)\sqrt{1+m^2}}{m^3}x'$$

$$-\frac{(1+m^2)}{2m^4}\sqrt{4m\sqrt{1+m^2}\,x'+1}$$

$$-\frac{m\sqrt{1+m^2}\,x'}{m^4}\sqrt{4m\sqrt{1+m^2}\,x'+1}$$

$$V = \int_0^{m\sqrt{1+m^2}} \pi y'^2 \mathrm{d}x' = \pi\Big\{\frac{1}{3}m(1+m^2)^{3/2}$$

$$+\frac{1}{2m^3}(1+m^2)^{3/2} + \frac{m^2+2}{2m}(1+m^2)^{3/2}$$

$$-\frac{(1+m^2)^{1/2}}{12m^5}\Big[(4m^4+4m^2+1)^{3/2}-1\Big]$$

$$-\frac{(1+m^2)^{-1/2}}{60m^5} - \frac{(1+m^2)^{1/2}}{6m^3}(4m^4+4m^2+1)^{3/2}$$

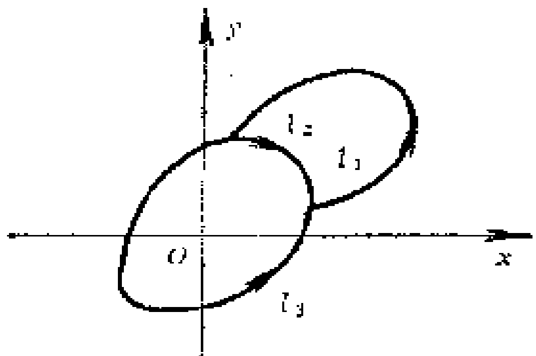
$$+\frac{(1+m^2)^{-1/2}}{60m^5}(4m^4+4m^2+1)^{5/2}\Big\}$$

$$= \pi\Big\{\frac{(1+m^2)^{3/2}(5m^4+6m^2+3)}{6m^3} - \frac{(1+m^2)^{1/2}}{12m^5}$$

$$\times[(4m^4+4m^2+1)^{1/2}+2m^2(4m^4+4m^2+1)^{3/2}-1]$$

$$+\frac{(1+m^2)^{-1/2}}{60m^3}[(4m^4+4m^2+1)^{5/2}-1]\Big\}$$

9． 设l_1+l_2是平面上任意一条不过原点也不含原点的正向闭曲线，并作辅助路径l_3如图。



于是 $\oint_{l_1+l_3}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=A$， $\oint_{l_2^-+l_3}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=A$。

则 $\oint_{l_1+l_2}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$，其中

$$P=\frac{-y}{\varphi(x)+y^2},\quad Q=\frac{x}{\varphi(x)+y^2}$$

故在不含原点的任意单连通区域内积分与路径无关，

所以 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，$(x,\ y)\neq(0,\ 0)$，即

$$x\varphi'(x)=2\varphi(x),\quad \varphi(x)=cx^2$$

由$\varphi(1)=1$，得$\varphi(x)=x^2$。

取l：$x^2+y^2=1$，$A=\oint_{x^2+y^2=1}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=2\pi$

10． 由解的结构定理易证。

1991年江苏省普通高校非理科专业本科高等数学竞赛试题

一、填空题(每小题 5 分，共50分)

1. 函数$y=\sin|\sin x|$ $\left(其中|x|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$的反函数为

________________。

2. 当$x\to 0$时，$3x-4\sin x+\sin x\cos x$ 与x^n为同阶无穷小，则$n=$________。

3. 在$x=1$时有极大值6，在 $x=3$时有极小值 2 的最低幂次多项式的表达式是____________。

4. 设$P(x)=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(1-x^m)^n$，$m$，$n$为正整数，则$P(1)$

$=$__________。

5. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x+\cos x^2)\sin x\,\mathrm{d}x=$__________。

6. 函数$f(x)=\ln(1-x-2x^2)$关于 x 的幂级数展开式为________________，该幂级数的收敛区间为__________。

7. 已知微分方程$y'=\frac{y}{x}+\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$有特解 $y=\frac{x}{\ln|x|}$，则$\varphi(x)=$__________。

8. 直线$\begin{cases}x=2z\\y=1\end{cases}$ 绕z轴旋转，得到的旋转面方程为

________.

9. 已知$\boldsymbol{a}$为单位向量，$\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$垂直于$7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$垂直于$7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，则向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为________.

10. 曲线C为$x^2+y^2+z^2=R^2$与$x+z=R$的交线，从原点看去C的方向为顺时针方向，则$\int_C y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=$

________.

二、(7分)已知数列$\{na_n\}$收敛，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$也收敛，求证$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛。

三、(7分)一向上凸的光滑曲线连接了$O(0,0)$、$A(1,4)$两点，而$P(x,\ y)$为曲线上的任一点，已知曲线与线段OP所围区域的面积为$x^{4/3}$，求该曲线的方程。

四、(12分)求下列曲面：$x^2+y^2=cz$，$x^2-y^2=\pm a^2$，$xy=\pm b^2$和平面$z=0$围成区域的体积(其中a,b,c为正实数)。

五、(12分)一点先向正东移动a米，然后左拐弯移动aq米(其中$0<q<1$)，如此不断重复左拐弯，使得后一段移动距离为前一段的q倍，这样该点有一极限位置。试问该极限位置与原出发点相距多少米？

六、(12分)已知$f(x)$在$[0,2]$上二次连续可微，$f(1)=0$。证明

$$\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{3}M,\ \text{其中}M=\max_{x\in[0,2]}|f''(x)|$$

1991年江苏省普通高等学校非理科专业专科高等数学竞赛试题

一、填空题(每小题 5 分，共40分)

1. 函数 $y=\sin|\sin x|\left(\text{其中}|x|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$的反函数为
________.

2. m、n 为正整数，$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$ ________.

3. α、β为常数，$f(x)$可导，
$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\alpha\Delta x)-f(x-\beta\Delta x)}{\Delta x}=$ ________.

4. 当$x\to 0$时，$e^x+\ln(1-x)-1$与x^n是同阶无穷小，则$n=$ ________.

5. 在$x=1$时有极大值6，在$x=3$时有极小值 2 的最低幂次多项式的表达式是________.

6. $\int_{-1}^{1}x(1+x^{1991})(e^x-e^{-x})\,dx=$ ________.

7. 已知微分方程$y'=\dfrac{y}{x}+\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$有特解$y=\dfrac{x}{\ln|x|}$，则$\varphi(x)=$ ________.

8. 设$P(x)$，$Q(x)$，$f(x)$都是连续函数，已知微分方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$有三个特解x，e^x，e^{-x}，则此微分方程的通解为 ________.

二、(8分)判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ 的敛散性(包括发散、条件收敛和绝对收敛)。

三、(8分)设 $x_1=1$，$x_{n+1}+\sqrt{1-x_n}=0$，试证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

四、(8分)求一连接 $O(0,0)$，$A(1,1)$ 两点的向上凸的连续曲线，使其上任一点 $P(x,y)$ 到 O 的直线段 OP 与该曲线所围区域的面积为 x^3。

五、(12分)设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有定义，在 $(0,+\infty)$ 内可导，$g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义且可导，$f(0)=g(0)=1$，又当 $x>0$ 时

$$f(x)+g(x)=3x+2,\quad f'(x)-g'(x)=1,$$
$$f'(2x)-g'(-2x)=-12x^2+1$$

求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的表达式。

六、(12分)设 $f(x)$ 为 $[0,+\infty)$ 上的单调减少的连续函数，试证明：

$$\int_0^x(x^2-3t^2)f(t)\,dt\geqslant 0$$

七、(12分)设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为常数，且

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\sin kx\right|\leqslant|\sin x|,\quad\left|\sum_{j=1}^{n}a_{n-j+1}\sin jx\right|\leqslant|\sin x|$$

试证明

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|\leqslant\frac{2}{n+1}.$$

提示与答案(本科)

一、1. $y=\operatorname{sgn}x\arcsin\sqrt{|x|}$，$x\in[-1,1]$

或 $y=\begin{cases} \arcsin\sqrt{x}, & x\in[0,1] \\ -\arcsin\sqrt{-x}, & x\in[-1,0) \end{cases}$

2. 5　　3. x^3-6x^2+9x+2

4. $(-1)^n n! m^n$　　5. 2

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}[1+(-2)^n]x^n$; $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

7. $-\frac{1}{x^2}$　　8. $x^2+y^2-4z^2=1$

9. $\frac{\pi}{3}$　　10. $-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi R^2$

二、$$\sum_{n=2}^{N+1}n(a_n-a_{n-1})=\sum_{n=2}^{N+1}na_n-\sum_{n=2}^{N+1}na_{n-1}$$

$$=\sum_{n=2}^{N+1}na_n-\sum_{n=1}^{N}(n+1)a_n$$

$$=(N+1)a_{N+1}-a_1-\sum_{n=1}^{N}a_n$$

所以 $$\sum_{n=1}^{N}a_n=(N+1)a_{N+1}-a_1-\sum_{n=2}^{N+1}n(a_n-a_{n-1}),$$

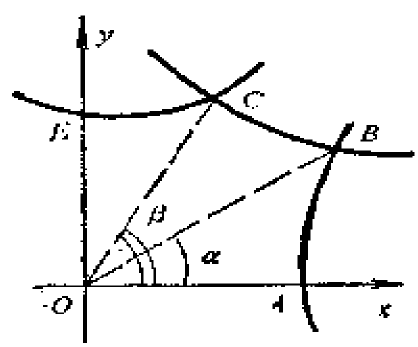
由此得证。

三、曲线 $y=y(x)$ 满足方程

$$\int_0^x y(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}xy(x)=x^{4/3},$$

$0\leqslant x\leqslant 1$

由已知可解得　$y=4x^{1/3}$



四、xz, yz 平面将区域分成四块等体积区域．将第一挂限的一块在 xy 平面上投影(见图)。区域 $OABO$ 记为(D_1)，

$\angle AOB$ 记 α，区域 $OBCO$ 记为 (D_2)，$\angle AOC$ 记 β，$\widehat{AB}$，$\widehat{BC}$，$\widehat{CE}$ 用极坐标表为

$$r=r_1(\theta),\quad r=r_2(\theta),\quad r=r_3(\theta)$$

则
$$r_1^2\cos 2\theta=a^2,\qquad r_1^4=\frac{a^4}{\cos 2\theta}$$

$$r_2^2\frac{1}{2}\sin 2\theta=b^2,\qquad r_3^2\cos 2\theta=-a^2$$

$$V=4\iint_{D}\frac{1}{c}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{r(\theta)}\frac{1}{c}r^3\mathrm{d}r=\frac{1}{C}\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^4(\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{c}\left[\int_0^{\alpha}\frac{a^4}{\cos^2 2\theta}\mathrm{d}\theta+\int_{\alpha}^{\beta}\frac{4b^2}{\sin^2 2\theta}\mathrm{d}\theta+\int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^4}{\cos^2 2\theta}d\theta\right]$$

$$=\frac{a^4}{2c}\operatorname{tg}2\alpha-\frac{2b^4}{c}\operatorname{ctg}2\theta\Big|_{\alpha}^{\beta}+\frac{a^4}{2c}\operatorname{tg}2\theta\Big|_{\beta}^{\frac{\pi}{2}}$$

由
$$r_1^2(\alpha)=r_2^2(\alpha),\quad r_2^2(\beta)=r_3^2(\beta)$$

得
$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2b^2}{a^2},\qquad \operatorname{tg}2\beta=-\frac{2b^2}{a^2}$$

所以
$$V=\frac{4a^2b^2}{c}$$

五、设出发点为 (x_0,y_0)，前四点位置为

$$(x_0,y_0)\to(x_0+a,y_0)\to(x_0+a,y_0+aq)$$
$$\to(x_0+a(1-q^2),y_0+aq)$$
$$\to(x_0+a(1-q^2),\ y_0+a(1-q^2)q)$$

用 $x_0+a(1-q^2)$，$y_0+a(1-q^2)q$，aq^4 分别代替 x_0,y_0,a，就可得后四点坐标，从而经过 $4K$ 段路后到达 (x_{4K},y_{4K}) 有

$$x_{4K}=x_0+a(1-q^2)+a(1-q^2)q^4+\cdots+a(1-q^2)q^{4(K-1)}$$
$$y_{4K}=y_0+aq(1-q^2)+aq(1-q^2)q^4$$
$$+\cdots+aq(1-q^2)q^{4(K-1)}$$

$$x_{4K}-x_0=a(1-q^2)[1+q^4+\cdots+q^{4(K-1)}]$$

$$\to a(1-q^2)\frac{1}{1-q^4}=\frac{a}{1+q^2}\quad (K\to\infty)$$

$$y_{4K}-y_0\to\frac{aq}{1+q^2}\qquad (K\to\infty)$$

所以极限位置和出发点的距离 $d=\dfrac{a}{\sqrt{1+q^2}}$(米)。

六、 $$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^2\mathrm{d}x\int_1^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=-\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t\int_0^t\mathrm{d}x+\int_1^2 f'(t)\,\mathrm{d}t\int_t^2\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^1 tf'(t)\,\mathrm{d}t+\int_1^2(2-t)f'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^1\frac{1}{2}t^2f''(t)\,\mathrm{d}t+\int_1^2\frac{1}{2}(2-t)^2f''(t)\,\mathrm{d}t$$

所以 $$\left|\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant M\left[\int_0^1\frac{1}{2}t^2\mathrm{d}t+\int_1^2\frac{1}{2}(2-t)^2\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{3}M$$

提示与答案(专科)

一、1. $y=\begin{cases}\arcsin\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ -\arcsin\sqrt{-x}, & -1\leqslant x<0\end{cases}$

2. $(-1)^{m-n}\dfrac{n}{m}$　　3. $(\alpha+\beta)f'(x)$

4. 3　　5. $y=x^3-6x^2+9x+2$

6. $\dfrac{4}{\mathrm{e}}$　　7. $-\dfrac{1}{x^2}$

8. $y=c_1(x-e^{x})+c_2(x-e^{-x})+x$

（此题形式可有多种）

二、由达朗贝尔判别法得级数绝对收敛。

三、利用数字归纳法可证得数列$\{x_n\}$单调减且有界，$x_n>-2$，$n=1,2,\cdots$，故$\{x_n\}$收敛。

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})$$

四、曲线$y=y(x)$满足方程

$$\int_0^x y\mathrm{d}x-\frac{1}{2}xy=x^3$$

由已知解得$y=x(7-6x)$。

五、$f(x)=2x+1$，$(x\geqslant 0)$，$g(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 0\\ x^3+x+1, & x<0\end{cases}$

六、记$F(x)=\int_0^x(x^2-3t^2)f(t)\mathrm{d}t$，则

$$F(x)=x^2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-3\int_0^x t^2f(t)\mathrm{d}t$$

$$F'(x)=2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+x^2f(x)-3x^2f(x)$$

$$=2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-2x^2f(x)$$

应用积分中值定理得

$$F'(x)=2x^2[f(\xi)-f(x)],\ \xi\in[0,x]$$

由条件知$F'(x)\geqslant 0$，所以$F(x)$在$[0,+\infty)$上单调增，又$F(0)=0$，故

$$F(x)\geqslant 0\quad x\in[0,+\infty)$$

七、记$f(x)=\sum_{k=1}^{n}a_K\sin Kx$，

$$g(x)=\sum_{j=1}^{n} a_{n-j+1}\sin jx.$$

则 $\qquad f'(x)=a_1\cos x+2a_2\cos 2x+\cdots+na_n\cos nx$

$\qquad g'(x)=a_n\cos x+2a_{n-1}\cos 2x+\cdots+na_1\cos nx$

所以 $\qquad f'(0)+g'(0)=(n+1)(a_1+a_2+\cdots+a_n)$

故得
$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right|=\left|\frac{f'(0)+g'(0)}{n+1}\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{n+1}(|f'(0)|+|g'(0)|)$$

而 $\qquad |f'(0)|=\left|\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|\leqslant\lim_{x\to 0}\left|\frac{\sin x}{x}\right|=1$

同理 $\qquad |g'(0)|\leqslant 1$，于是可证之。

1991年《高等数学》竞赛试题

（上海交通大学）

一、[10分] 设 $f(x)=\dfrac{2x+|x|}{4x-3|x|}$，求

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$　　(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$　　(4) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

(5) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

二、[10分]计算下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}+2^{\frac{1}{x}}\right)^x$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(n!)^{\frac{1}{n}}$

三、[10分] 设 $x_1=1$，$x_2=2$，$x_{n+2}=\sqrt{x_{n+1}\cdot x_n}$，$n=1,2,\cdots$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

四、[10分]证明　当 $0<x<1$ 时

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}<\frac{\ln(1+x)}{\arcsin x}$$

五、[10分]计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx$

六、[10分]设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，且

$$f(x)=\frac{x}{1+\cos^2 x}+\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,dx$$

求 $f(x)$。

七、[10分]设过点(1,0,0)且平行于 Z 轴的直线为 l，在 YOZ 平面内有一抛物线段 $y=1-z^2(-1\leqslant z\leqslant 1)$，试求此曲线段绕直线 l 旋转所得的曲面与两平面 $z=-1$，$z=1$ 所围立体的体积。

八、[10分]说明：本题有(A)，(B)两题，试点班及少年班学生只做(B)题，其它班级学生只做(A)题。

(A)计算 $\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}dy$。

(B)求幂级数

$1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2\cdot 4}-\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!!}+\cdots$ 的和函数。

九、[10分]设 $f(x)$ 在$[a,b]$上具有连续导数。证明

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|+\int_a^b|f'(x)|\,dx\geqslant\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$$

十、[10分]设 $f(x)$ 在$[-2,2]$上二阶可导，且$|f(x)|\leqslant 1$，又 $f^2(0)+[f'(0)]^2=4$。证明：在$(-2,2)$内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)+f''(\xi)=0$。

八九级数学竞赛试题

（清华大学）　1991.3.10

一、计算$\iiiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}u$。

其中，

$\Omega=\{(x,y,z,u)\mid x^2+y^2+z^2+u^2\leqslant a^2\}$，　$a>0$.

二、欲使$\int_0^n \prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} (t-j)\mathrm{d}t=\lambda\int_0^n \prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq n-k}}^{n} (t-j)\mathrm{d}t$，试求$\lambda=$？

其中，$\prod$是连乘积记号，如

$$\prod_{i=1}^{n} f_i(a)=f_1(a)f_2(a)\cdots f_n(a)$$

三、求和式$\sum\limits_{j=1}^{n} jx^{4+j}y^{3-2j}$，　$(y\neq 0)$。

四、n^2个数$a,a+d,a+2d,\cdots,a+(n-1)d,\cdots,a+(n^2-1)d$。其中$a\neq 0,d\neq 0,n\geqslant 2$，将它们按下列顺序依次排列成一个$n$阶方阵$A$：从第一行开始，从左往右排，第一行排满后，第二行从右往左排，第三行从左往右排，…。试求当$n\geqslant 2$时，矩阵A的秩。

五、假如地球表面的气温是时间与地点的连续函数，那么在任何时刻，地球赤道上必存在以球心为对称中心的一对

点，在这对点上，气温相等。

六、求证方程 $1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n}=0$，最多有一个实根。

七、求微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y+x(1-x^2-y^2)\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=-x+y(1-x^2-y^2)\end{cases}$$

的通解。

八、(1)求行列式

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}I_2 & I_2 & I_2 & \cdots & I_2\\ a_1I_2 & a_2I_2 & a_3I_2 & \cdots & a_nI_2\\ a_1^2I_2 & a_2^2I_2 & a_3^2I_2 & \cdots & a_n^2I_2\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ a_1^{n-1}I_2 & a_2^{n-1}I_2 & a_3^{n-1}I_2 & \cdots & a_n^{n-1}I_2\end{vmatrix}$$

的值，其中 $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$；

(2)若将 I_2 推广到 m 阶单位矩阵 I_m，试求行列式 Δ_m 的值。

九、设 A 是 n 阶实对称矩阵，试证明对于任意的 $x\in R^n$，恒有 $x'Ax\geqslant 0$ 或恒有 $x'Ax\leqslant 0$ 的充分必要条件是对于任意的 $x\in R^n$，如果 $x'Ax=0$，则必有 $Ax=0$。